

УДК 612.84:778.38

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ДВУМЯ КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ СЕТЧАТКИ

В.П. Титарь, О.В. Шпаченко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина*

Поступила в редакцию 22 октября 2011 г.

В рамках голографической модели физиологической оптики проведен теоретический анализ прохождения лазерного излучения через границу раздела между квазикристаллическими слоями сетчатки (слоем нервных волокон и фоторецепторными дисками). Для решения данной задачи нами были получены аналоги формул Френеля для границы раздела между двумя одноосными кристаллами. Результаты исследования могут найти применение при использовании лазерных методов для диагностики и лечения офтальмологических заболеваний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: голография, физиологическая оптика, сетчатка глаза, одноосный кристалл, форм-двулучепреломление, формулы Френеля.

В межах голографічної моделі фізіологічної оптики проведено теоретичний аналіз проходження лазерного випромінювання крізь границю розподілу між квазікристалічними шарами сітківки (шаром нервових волокон та фоторецепторними дисками). Для вирішення цієї задачі нами було отримано аналоги формул Френзеля для границі розподілу між двома одновісними кристалами. Результати дослідження можуть знайти застосування при використанні лазерних методів для діагностики та лікування офтальмологічних захворювань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: голографія, фізіологічна оптика, сітківка ока, одновісний кристал, форм-двопроменезаломлення, формули Френеля.

Theoretical analysis of the laser radiation transmission at interface between the quasi-crystalline layers of the retina (a layer of nerve fibers and photoreceptor disks) is analyzed in a frame of holographic model of physiological optics. To solve the problem, we have obtained analogues of Fresnel's formulas for the interface between two uniaxial crystals. The results may be applied for diagnosis and treatment of ophthalmologic diseases by laser techniques.

KEYWORDS: holography, physiological optics, retina, uniaxial crystal, form-birefringence, Fresnel's formulas.

Задачи об отражении и преломлении света на границе раздела между изотропной средой и одноосным кристаллом, а также на границе раздела между кристаллом и изотропной средой ранее решались в общем виде Ф.И.Фёдоровым и В.В.Филипповым [1,2]. Однако аналогичная задача для случая падения света на границу раздела между двумя одноосными кристаллами до сих пор не была решена в общем виде.

Используя разработанный Ф.И.Фёдоровым метод решения такого класса задач, нами впервые получены аналоги формул Френеля для границы раздела между двумя немагнитными прозрачными одноосными кристаллами при произвольном расположении в пространстве их оптических осей. Поскольку полученные формулы для общего случая произвольного расположения в пространстве оптических осей кристаллов весьма громоздки, что затрудняет их анализ, нами также были рассмотрены несколько частных случаев с упрощённой геометрией задачи. В данной работе представлены общие формулы, а также частный случай, когда оптическая ось первого кристалла параллельна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред, что соответствует расположению квазикристаллических структур в сетчатке инвертированного глаза высших животных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках создания голографической модели физиологической оптики в лаборатории радио- и оптической голографии ХНУ им. В.Н.Каразина проводится теоретическое исследование отражения и преломления электромагнитных волн видимого диапазона на границах разделов различных слоёв сетчатки инвертированного глаза высших животных. Такое исследование представляет не только теоретический, но и практический интерес, поскольку позволяет прогнозировать результаты взаимодействия лазерного излучения с сетчаткой глаза при проведении диагностических и лечебных процедур в офтальмологии.

Сетчатка глаза высших животных содержит квазикристаллические структуры двух типов. Квазикристалл первого типа составлен из нервных волокон сетчатки. Нервные волокна представляют собой тонкие цилиндры с диаметром, сравнимым с длиной волны видимого диапазона. В жёлтом пятне сетчатки нервные волокна располагаются упорядоченно, что обуславливает появление экспериментально наблюдаемого форм-двулучепреломления. Таким образом, слой нервных волокон сетчатки представляет собой положительный одноосный квазикристалл, оптическая ось которого параллельна границе раздела сред в сетчатке [3-5]. Квазикристаллические структуры второго типа составлены из фоторецепторных дисков, расположенных в наружных сегментах фоторецепторных клеток. Фоторецепторные диски представляют собой специализированные мембранные структуры, образующие систему тонких параллельных пластин, разделённых внутриклеточной средой. Поскольку толщина дисков и расстояния между ними меньше длины волны видимого света, то такая высокоупорядоченная структура ведёт себя как одноосный квазикристалл с оптической осью, перпендикулярной границе раздела сред [3]. Стопки фоторецепторных дисков в темноте являются положительным, а на свету – отрицательным одноосным квазикристаллом [6].

Ранее нами уже были рассмотрены процессы отражения и преломления лазерного излучения на границах разделов между квазикристаллическими слоями сетчатки и примыкающими к ним изотропными средами [7-9]. Однако в центральной ямке сетчатки слой нервных волокон фактически примыкает непосредственно к наружным сегментам фоторецепторов [10], что обуславливает необходимость рассматривать процессы отражения и преломления на границе раздела двух одноосных квазикристаллов.

Так как в кристалле распространяются две волны, то данная задача распадается на две подзадачи: 1) падение на границу раздела обыкновенной волны; 2) падение на границу раздела необыкновенной волны. В общем случае как обыкновенная, так и необыкновенная падающая волна порождают по две отражённые (обыкновенную и необыкновенную) волны, идущие от границы раздела обратно в первый кристалл, и по две преломлённые (обыкновенную и необыкновенную) волны, распространяющиеся во втором кристалле. Таким образом, аналоги формул Френеля для границы раздела между двумя немагнитными прозрачными одноосными кристаллами состоят из двух групп равенств (одна группа – для обыкновенной падающей волны, вторая – для необыкновенной падающей волны), по четыре равенства в каждой группе.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При решении задачи об отражении и преломлении электромагнитных волн на границе между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами векторы рефракции m_i падающих, отражённых и преломлённых волн удобно представить в следующем виде [1]:

$$\vec{m}_i = n_i \vec{n}_i, \quad \vec{b} = \eta_i \vec{q}, \quad (1)$$

$$\vec{b} = [\vec{q}, \vec{a}], \quad (2)$$

$$\vec{a} = [\vec{m}_i, \vec{q}], \quad (3)$$

где \vec{n}_i - волновая нормаль соответствующей волны; n_i - показатель преломления для среды, в которой эта волна распространяется; \vec{q} - единичный вектор нормали к границе раздела сред, направленный из первой среды во вторую; η_i - параметр, который может быть определён из уравнения нормалей для данной среды.

Падение обыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами

В случае падения на границу раздела обыкновенной волны векторы напряжённости электрического и магнитного поля будут определяться следующими формулами:

- падающая обыкновенная волна:

$$\vec{E}_{онад} = A_{онад} [\vec{m}_{онад}, \vec{c}_1], \quad \vec{H}_{онад} = A_{онад} [\vec{m}_{онад}, [\vec{m}_{онад}, \vec{c}_1]] \quad (4)$$

- отражённая обыкновенная волна:

$$\vec{E}_{ооотр} = A_{ооотр} [\vec{m}_{ооотр}, \vec{c}_1], \quad \vec{H}_{ооотр} = A_{ооотр} [\vec{m}_{ооотр}, [\vec{m}_{ооотр}, \vec{c}_1]] \quad (5)$$

- отражённая необыкновенная волна:

$$\vec{E}_{ооотр} = A_{ооотр} (\varepsilon_{o1} - \vec{m}_{ооотр} \bullet \vec{m}_{ооотр}) \vec{c}_1, \quad \vec{H}_{ооотр} = A_{ооотр} \varepsilon_{o1} [\vec{m}_{ооотр}, \vec{c}_1] \quad (6)$$

(знак \bullet означает диадное произведение векторов);

- преломлённая обыкновенная волна:

$$\vec{E}_{опрел} = A_{опрел} [\vec{m}_{опрел}, \vec{c}_2], \quad \vec{H}_{опрел} = A_{опрел} [\vec{m}_{опрел}, [\vec{m}_{опрел}, \vec{c}_2]] \quad (7)$$

- преломлённая необыкновенная волна:

$$\vec{E}_{опрел} = A_{опрел} (\varepsilon_{о2} - \vec{m}_{опрел} \bullet \vec{m}_{опрел}) \vec{c}_2, \quad \vec{H}_{опрел} = A_{опрел} \varepsilon_{о2} [\vec{m}_{опрел}, \vec{c}_2]. \quad (8)$$

где \vec{c}_1 и \vec{c}_2 - единичные векторы, параллельные оптической оси первого и второго одноосного кристалла соответственно; $\varepsilon_{о1}, \varepsilon_{e1}, \varepsilon_{о2}, \varepsilon_{e2}$ - компоненты тензоров диэлектрической проницаемости ε_1 и ε_2 для первого и второго одноосного кристалла соответственно.

Здесь и далее первая буква в подстрочном индексе обозначает характеристику падающей волны (о-либо e- падающая волна), а вторая буква о или e относится к характеристике соответствующей отражённой либо преломлённой волны. Индексы «пад», «отр», «прел» относятся к падающим, отражённым и преломлённым волнам соответственно.

Для отыскания амплитудных множителей $A_{ооотр}$, $A_{ооотр}$, $A_{оопрел}$, $A_{оопрел}$, входящих в выражения для напряжённостей электрического и магнитного полей (4)-(8), запишем граничные условия для прозрачных немагнитных кристаллов при падающей обыкновенной волне:

$$[\vec{E}_{опад} + \vec{E}_{ооотр} + \vec{E}_{ооотр} - \vec{E}_{оопрел} - \vec{E}_{оопрел}, \vec{q}] = 0, \quad (9)$$

$$\vec{H}_{опад} + \vec{H}_{ооотр} + \vec{H}_{ооотр} - \vec{H}_{оопрел} - \vec{H}_{оопрел} = 0. \quad (10)$$

Подставляя в граничные условия (9), (10) выражения для полей (4)-(8) и умножая (9) слева скалярно на \vec{b} , а (10) умножая слева скалярно на \vec{a} , $\vec{m}_{ооотр}$ и $\vec{m}_{оопрел}$, получаем следующую систему линейно независимых уравнений:

$$(A_{опад} - A_{ооотр}) \eta_{опад} (\vec{a}, \vec{c}_1) + A_{ооотр} \left\{ \varepsilon_{о1} (\vec{b}, \vec{c}_1) - (\vec{m}_{ооотр}, \vec{c}_1) \vec{a}^2 \right\} - A_{оопрел} \eta_{оопрел} (\vec{a}, \vec{c}_2) - A_{оопрел} \left\{ \varepsilon_{о2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{оопрел}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} = 0, \quad (11)$$

$$(A_{опад} + A_{ооотр}) \varepsilon_{о1} (\vec{a}, \vec{c}_1) - A_{ооотр} \varepsilon_{о1} [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 - A_{оопрел} \varepsilon_{о2} (\vec{a}, \vec{c}_2) + A_{оопрел} \varepsilon_{о2} [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 = 0, \quad (12)$$

$$2A_{опад} \eta_{опад} [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 + A_{ооотр} \varepsilon_{о1} (\eta_{ооотр} + \eta_{опад}) (\vec{a}, \vec{c}_1) - A_{оопрел} (\eta_{оопрел} + \eta_{опад}) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 - A_{оопрел} \varepsilon_{о2} (\eta_{оопрел} + \eta_{опад}) (\vec{a}, \vec{c}_2) = 0, \quad (13)$$

$$A_{опад} (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 - A_{ооотр} (\eta_{опад} + \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 + A_{ооотр} \varepsilon_{о1} (\eta_{ооотр} - \eta_{оопрел}) (\vec{a}, \vec{c}_1) - A_{оопрел} \varepsilon_{о2} (\eta_{оопрел} - \eta_{оопрел}) (\vec{a}, \vec{c}_2) = 0. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (11)-(14) относительно неизвестных амплитудных множителей, получаем:

$$A_{ооотр} = \frac{A_{опад}}{\Delta_o} \left\{ \varepsilon_{о1} \varepsilon_{о2} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\vec{a}, \vec{c}_2)^2 (\eta_{оопрел} - \eta_{ооотр}) (\varepsilon_{о2} \eta_{опад} - \varepsilon_{о1} \eta_{оопрел}) + \varepsilon_{о1} \varepsilon_{о2} \eta_{опад} (\vec{a}, \vec{c}_1) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 \times \right. \\ \times \left\{ (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 (\eta_{оопрел} - \eta_{ооотр}) - (\vec{a}, \vec{c}_1) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 (\eta_{ооотр} - \eta_{оопрел}) \right\} + \\ + \varepsilon_{о1} \varepsilon_{о2} \eta_{оопрел} (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 \left\{ (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) + (\vec{a}, \vec{c}_1) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 (\eta_{ооотр} - \eta_{опад}) \right\} + \\ + \varepsilon_{о1} \left\{ \varepsilon_{о1} (\vec{b}, \vec{c}_1) - (\vec{m}_{ооотр}, \vec{c}_1) \vec{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{о2} (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) + \right. \\ \left. + [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 \left\{ \varepsilon_{о1} (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{a}, \vec{c}_2) (\eta_{оопрел} - \eta_{ооотр}) + (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 \right\} \right\} - \\ - \varepsilon_{о1} \left\{ \varepsilon_{о2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{оопрел}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{о2} (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 (\eta_{опад} - \eta_{ооотр}) + \right. \\ \left. + [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 \left\{ \varepsilon_{о1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{ооотр} - \eta_{оопрел}) + (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 \right\} \right\} \left. \right\}, \quad (15)$$

$$A_{ооотр} = \frac{A_{опад}}{\Delta_o} \left\{ 2\varepsilon_{о1} \varepsilon_{о2} \eta_{опад} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\vec{a}, \vec{c}_2) (\eta_{оопрел} - \eta_{ооотр}) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 + \varepsilon_{о2} (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{a}, \vec{c}_2)^2 (\varepsilon_{о2} \eta_{опад} + \varepsilon_{о1} \eta_{оопрел}) \times \right. \\ \times \left\{ (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 + (\eta_{опад} + \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 + (\vec{a}, \vec{c}_1) [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 \left\{ \varepsilon_{о2} \eta_{опад} [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon_{о1} \left\{ \varepsilon_{о2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{оопрел}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} \right\} (\eta_{опад} - \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 + (\eta_{опад} + \eta_{оопрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 \right\} + \\ \left. + 2\varepsilon_{о2} \eta_{опад} (\vec{a}, \vec{c}_2) [\vec{a}, \vec{m}_{опад}] \vec{c}_1 [\vec{a}, \vec{m}_{ооотр}] \vec{c}_1 \left\{ \eta_{оопрел} [\vec{a}, \vec{m}_{оопрел}] \vec{c}_2 + \varepsilon_{о2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{оопрел}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} \right\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{оопрел}} = & \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \left\{ \eta_{\text{онад}} (\bar{a}, \bar{c}_1) \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} \left\{ 2\varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{оепрел}} - \eta_{\text{оотпр}}) + [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 \times \right. \right. \\
& \times \left\{ (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{оепрел}} - \eta_{\text{онад}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 - (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{онад}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оепрел}}] \bar{c}_2 \right\} + \\
& + [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{оепрел}} + \eta_{\text{онад}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 - (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{оотпр}} + \eta_{\text{онад}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оепрел}}] \bar{c}_2 \right\} \left. \right\} + \\
& + \varepsilon_{o2} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{b}, \bar{c}_1) - (\bar{m}_{\text{оотпр}}, \bar{c}_1) \bar{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оепрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 + [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\bar{a}, \bar{c}_2) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оепрел}}) + 2\eta_{\text{онад}} [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оепрел}}] \bar{c}_2 \right\} \right\} + \varepsilon_{o1} \left\{ \varepsilon_{o2} (\bar{b}, \bar{c}_2) - (\bar{m}_{\text{оепрел}}, \bar{c}_2) \bar{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{онад}}) \times \right. \\
& \times [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 - [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпр}}) + 2\eta_{\text{онад}} [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \right\} \left. \right\} \left. \right\}, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{оепрел}} = & \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \left\{ 2\varepsilon_{o1}^2 (\bar{a}, \bar{c}_1)^3 \eta_{\text{онад}} (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{оепрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 + \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\bar{a}, \bar{c}_2) (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{оотпрел}} + \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}) \times \right. \\
& \times (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оотпр}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 + \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\bar{a}, \bar{c}_2) (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{оотпрел}} - \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпр}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 + \\
& + \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 \left\{ \eta_{\text{онад}} [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 - \varepsilon_{o1} (\bar{b}, \bar{c}_1) + (\bar{m}_{\text{оотпр}}, \bar{c}_1) \bar{a}^2 \right\} - \\
& - \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 \left\{ \eta_{\text{онад}} [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 + \varepsilon_{o1} (\bar{b}, \bar{c}_1) - (\bar{m}_{\text{оотпр}}, \bar{c}_1) \bar{a}^2 \right\} + \\
& + 2\eta_{\text{онад}} (\bar{a}, \bar{c}_2) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{онад}}] \bar{c}_1 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o1} \eta_{\text{оотпрел}} [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 + \varepsilon_{o2} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{b}, \bar{c}_1) - (\bar{m}_{\text{оотпр}}, \bar{c}_1) \bar{a}^2 \right\} \right\} \left. \right\}, \quad (18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_o = & \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\bar{a}, \bar{c}_2)^2 (\eta_{\text{оепрел}} - \eta_{\text{оотпр}}) (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{оотпрел}} + \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}) + \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}} (\bar{a}, \bar{c}_1) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 \times \\
& \times \left\{ (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{оепрел}} - \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 - (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оепрел}}] \bar{c}_2 \right\} + \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} \eta_{\text{оотпрел}} (\bar{a}, \bar{c}_2) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \times \\
& \times \left\{ (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оепрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 - (\bar{a}, \bar{c}_1) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпр}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оепрел}}] \bar{c}_2 \right\} - \varepsilon_{o2} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{b}, \bar{c}_1) - (\bar{m}_{\text{оотпр}}, \bar{c}_1) \bar{a}^2 \right\} \times \\
& \times \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{оепрел}} - \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 - [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o2} (\bar{a}, \bar{c}_2)^2 (\eta_{\text{оепрел}} + \eta_{\text{онад}}) + \right. \right. \\
& + (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 \left. \right\} + \varepsilon_{o1} \left\{ \varepsilon_{o2} (\bar{b}, \bar{c}_2) - (\bar{m}_{\text{оепрел}}, \bar{c}_2) \bar{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{o1} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{оотпрел}}) \times \right. \\
& \times [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 - [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o2} (\bar{a}, \bar{c}_1) (\bar{a}, \bar{c}_2) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпр}}) + (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оотпрел}}) [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпрел}}] \bar{c}_2 [\bar{a}, \bar{m}_{\text{оотпр}}] \bar{c}_1 \right\} \left. \right\}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\eta_{\text{онад}} = \sqrt{\varepsilon_{o1} - \bar{a}^2}, \quad (20)$$

$$\eta_{\text{оотпр}} = -\eta_{\text{онад}}, \quad (21)$$

$$\eta_{\text{оотпрел}} = \sqrt{\varepsilon_{o2} - \bar{a}^2}, \quad (22)$$

$$\eta_{\text{оотпр}} = -\frac{1}{\bar{q}\varepsilon_1\bar{q}} \left\{ \bar{b}\varepsilon_1\bar{q} + \sqrt{(\bar{b}\varepsilon_1\bar{q})^2 - \bar{q}\varepsilon_1\bar{q}(\bar{b}\varepsilon_1\bar{b} - \varepsilon_{o1}\varepsilon_{e1})} \right\}, \quad (23)$$

$$\eta_{\text{оотпрел}} = \frac{1}{\bar{q}\varepsilon_2\bar{q}} \left\{ -\bar{b}\varepsilon_2\bar{q} + \sqrt{(\bar{b}\varepsilon_2\bar{q})^2 - \bar{q}\varepsilon_2\bar{q}(\bar{b}\varepsilon_2\bar{b} - \varepsilon_{o2}\varepsilon_{e2})} \right\}. \quad (24)$$

Для частного случая, когда оптическая ось первого кристалла параллельна, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред, будут выполняться условия: $(\bar{c}_1, \bar{q}) = 0$, $(\bar{c}_2, \bar{q}) = 1$, $[\bar{c}_2, \bar{q}] = 0$. В этом случае формулы для амплитудных множителей значительно упрощаются и принимают вид:

$$A_{\text{оотпр}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \bar{a}^2 \eta_{\text{онад}} \left\{ (\bar{b}, \bar{c}_1)^2 (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оотпрел}}) (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{оотпр}} \eta_{\text{оепрел}} - \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}^2) - \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} (\bar{a}, \bar{c}_1)^2 (\eta_{\text{оотпр}} - \eta_{\text{оотпрел}}) \right\}, \quad (25)$$

$$A_{\text{оотпр}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \bar{a}^2 (\bar{a}, \bar{c}_1) (\bar{b}, \bar{c}_1) (\varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}} - \varepsilon_{o1} \eta_{\text{оепрел}}) \left\{ (\eta_{\text{оотпрел}} - \eta_{\text{онад}}) \eta_{\text{онад}} - (\eta_{\text{оотпрел}} + \eta_{\text{онад}}) \eta_{\text{оотпр}} \right\}, \quad (26)$$

$$A_{\text{оопрел}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} (\vec{b}, \vec{c}_1) \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 \left\{ \eta_{\text{онад}} (\eta_{\text{ооотр}} - \eta_{\text{онад}}) (\varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_{o1} \eta_{\text{оопрел}}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{\text{ооотр}} (\eta_{\text{ооотр}} + \eta_{\text{онад}}) (\varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}} - \varepsilon_{o1} \eta_{\text{оопрел}}) \right\} - 2\eta_{\text{онад}}^2 \eta_{\text{ооотр}} (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{ооотр}} \eta_{\text{оопрел}} - \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}^2) \right\}, \quad (27)$$

$$A_{\text{оопрел}} = \frac{A_{\text{онад}}}{\Delta_o} \varepsilon_{o1} \eta_{\text{онад}} (\vec{a}, \vec{c}_1) \left\{ 2\varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{\text{ооотр}} - \eta_{\text{оопрел}}) + (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \left\{ \eta_{\text{онад}} (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{оопрел}}) (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{ооотр}}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{\text{ооотр}} (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}) (\eta_{\text{онад}} - \eta_{\text{ооотр}}) \right\} \right\}, \quad (28)$$

$$\Delta_o \vec{a}^2 \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{\text{оопрел}} - \eta_{\text{ооотр}}) (\varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}} + \varepsilon_{o1} \eta_{\text{оопрел}}) - \right. \\ \left. - \eta_{\text{онад}} (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{\text{онад}} + \eta_{\text{оопрел}}) (\varepsilon_{o1} \eta_{\text{ооотр}} \eta_{\text{оопрел}} - \varepsilon_{o2} \eta_{\text{онад}}^2) \right\}. \quad (29)$$

Падение необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами

Задача о нахождении параметров отражённых и преломлённых волн в случае падения необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными кристаллами решается аналогично тому, как это было сделано выше для падающей обыкновенной волны. В этом случае векторы напряжённости электрического и магнитного поля будут определяться формулами:

- падающая необыкновенная волна:

$$\vec{E}_{\text{енад}} = A_{\text{енад}} (\varepsilon_{o1} - \vec{m}_{\text{енад}} \bullet \vec{m}_{\text{енад}}) \vec{c}_1, \quad \vec{H}_{\text{енад}} = A_{\text{енад}} \varepsilon_{o1} [\vec{m}_{\text{енад}}, \vec{c}_1], \quad (30)$$

- отражённая обыкновенная волна:

$$\vec{E}_{\text{еотр}} = A_{\text{еотр}} [\vec{m}_{\text{еотр}}, \vec{c}_1], \quad \vec{H}_{\text{еотр}} = A_{\text{еотр}} [\vec{m}_{\text{еотр}}, [\vec{m}_{\text{еотр}}, \vec{c}_1]], \quad (31)$$

- отражённая необыкновенная волна:

$$\vec{E}_{\text{еотр}} = A_{\text{еотр}} (\varepsilon_{o1} - \vec{m}_{\text{еотр}} \bullet \vec{m}_{\text{еотр}}) \vec{c}_1, \quad \vec{H}_{\text{еотр}} = A_{\text{еотр}} [\vec{m}_{\text{еотр}}, [\vec{m}_{\text{еотр}}, \vec{c}_1]], \quad (32)$$

- преломлённая обыкновенная волна:

$$\vec{E}_{\text{опрел}} = A_{\text{опрел}} [\vec{m}_{\text{опрел}}, \vec{c}_2], \quad \vec{H}_{\text{опрел}} = A_{\text{опрел}} [\vec{m}_{\text{опрел}}, [\vec{m}_{\text{опрел}}, \vec{c}_2]], \quad (33)$$

- преломлённая необыкновенная волна:

$$\vec{E}_{\text{епрел}} = A_{\text{епрел}} (\varepsilon_{o2} - \vec{m}_{\text{епрел}} \bullet \vec{m}_{\text{епрел}}) \vec{c}_2, \quad \vec{H}_{\text{епрел}} = A_{\text{епрел}} \varepsilon_{o2} [\vec{m}_{\text{епрел}}, \vec{c}_2], \quad (34)$$

В случае падения необыкновенной волны на границу раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами граничные условия имеют вид:

$$[\vec{E}_{\text{енад}} + \vec{E}_{\text{еотр}} + \vec{E}_{\text{еотр}} - \vec{E}_{\text{опрел}} - \vec{E}_{\text{епрел}}, \vec{q}] = 0, \quad (35)$$

$$\vec{H}_{\text{енад}} + \vec{H}_{\text{еотр}} + \vec{H}_{\text{еотр}} - \vec{H}_{\text{опрел}} - \vec{H}_{\text{епрел}} = 0, \quad (36)$$

Для нахождения амплитудных множителей следует подставить в граничные условия (35), (36) выражения для полей (30)-(34) и затем перейти от двух векторных уравнений к четырём скалярным. Осуществляется этот переход путём умножения выражения (35) слева скалярно на \vec{b} , а выражения (36) – слева скалярно на векторы \vec{a} , $\vec{m}_{\text{еотр}}$ и $\vec{m}_{\text{епрел}}$, в результате чего получаем следующую систему из четырёх линейно независимых уравнений:

$$A_{\text{енад}} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{b}, \vec{c}_1) - (\vec{m}_{\text{енад}}, \vec{c}_1) \vec{a}^2 \right\} + A_{\text{еотр}} \eta_{\text{еотр}} (\vec{a}, \vec{c}_1) + A_{\text{еотр}} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{b}, \vec{c}_1) - (\vec{m}_{\text{еотр}}, \vec{c}_1) \vec{a}^2 \right\} - \\ - A_{\text{епрел}} \eta_{\text{епрел}} (\vec{a}, \vec{c}_2) - A_{\text{епрел}} \left\{ \varepsilon_{o2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{\text{епрел}}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} = 0, \quad (37)$$

$$A_{\text{енад}} \varepsilon_{o1} [\vec{a}, \vec{m}_{\text{енад}}] \vec{c}_1 - A_{\text{еотр}} \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1) + A_{\text{еотр}} \varepsilon_{o1} [\vec{a}, \vec{m}_{\text{еотр}}] \vec{c}_1 + A_{\text{епрел}} \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_2) + A_{\text{епрел}} \varepsilon_{o2} [\vec{a}, \vec{m}_{\text{епрел}}] \vec{c}_2 = 0, \quad (38)$$

$$A_{\text{енад}} \varepsilon_{o1} (\eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{еотр}}) (\vec{a}, \vec{c}_1) + A_{\text{еотр}} \varepsilon_{o1} (\eta_{\text{еотр}} - \eta_{\text{еотр}}) (\vec{a}, \vec{c}_1) - A_{\text{епрел}} (\eta_{\text{опрел}} - \eta_{\text{еотр}}) [\vec{a}, \vec{m}_{\text{епрел}}] \vec{c}_2 - \\ - A_{\text{епрел}} \varepsilon_{o2} (\eta_{\text{епрел}} - \eta_{\text{еотр}}) (\vec{a}, \vec{c}_2) = 0, \quad (39)$$

$$A_{\text{енад}} \varepsilon_{o1} (\eta_{\text{енад}} - \eta_{\text{епрел}}) (\vec{a}, \vec{c}_1) + A_{\text{еотр}} (\eta_{\text{еотр}} - \eta_{\text{епрел}}) [\vec{a}, \vec{m}_{\text{еотр}}] \vec{c}_1 + A_{\text{еотр}} \varepsilon_{o1} (\eta_{\text{еотр}} - \eta_{\text{епрел}}) (\vec{a}, \vec{c}_1) - \\ - A_{\text{епрел}} (\eta_{\text{опрел}} - \eta_{\text{епрел}}) [\vec{a}, \vec{m}_{\text{епрел}}] \vec{c}_2 = 0. \quad (40)$$

Решая систему уравнений (37)-(40), получаем следующие выражения для амплитудных множителей:

$$\begin{aligned} & \times \left\{ (\vec{a}, \vec{c}_1) (\eta_{eootp} - \eta_{eootp}) [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 - (\vec{a}, \vec{c}_2) (\eta_{eootp} - \eta_{eепрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{eootp}] \vec{c}_1 + \varepsilon_{o2} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{b}, \vec{c}_1) - (\vec{m}_{eootp}, \vec{c}_1) \vec{a}^2 \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{a}, \vec{c}_2) (\eta_{eепрел} - \eta_{eепрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 + [\vec{a}, \vec{m}_{eootp}] \vec{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_2)^2 (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) + (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 \right\} + \varepsilon_{o1} \left\{ \varepsilon_{o2} (\vec{b}, \vec{c}_2) - (\vec{m}_{eепрел}, \vec{c}_2) \vec{a}^2 \right\} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{eootp} - \eta_{eепрел}) [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - [\vec{a}, \vec{m}_{eootp}] \vec{c}_1 \left\{ \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{a}, \vec{c}_2) (\eta_{eootp} - \eta_{eootp}) + (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) [\vec{a}, \vec{m}_{eootp}] \vec{c}_1 [\vec{a}, \vec{m}_{eепрел}] \vec{c}_2 \right\} \right\} . \quad (45) \end{aligned}$$

$$\eta_{енад} = \frac{1}{\vec{q}\varepsilon_1\vec{q}} \left\{ -\vec{b}\varepsilon_1\vec{q} + \sqrt{(\vec{b}\varepsilon_1\vec{q})^2 - \vec{q}\varepsilon_1\vec{q}(\vec{b}\varepsilon_1\vec{b} - \varepsilon_{o1}\varepsilon_{e1})} \right\} , \quad (46)$$

Параметры η_{eootp} , η_{eootp} , $\eta_{eепрел}$, $\eta_{eепрел}$ определяются приведенными ранее формулами (21), (23), (22), (24) соответственно, с той лишь разницей, что в этом случае входящие в перечисленные формулы векторы \vec{b} и \vec{a} будут определяться через вектор рефракции падающей необыкновенной волны.

Для частного случая, когда оптическая ось первого кристалла параллельна, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред, формулы для амплитудных множителей определяются выражениями:

$$A_{eootp} = \frac{A_{енад}}{\Delta_e} \varepsilon_{o1} \vec{a}^2 (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{b}, \vec{c}_1) (\eta_{енад} - \eta_{eootp}) \left\{ \varepsilon_{o2} (\varepsilon_{o1} - \vec{a}^2) - \varepsilon_{o1} \eta_{eепрел} \eta_{eепрел} \right\} , \quad (47)$$

$$A_{eепрел} = \frac{A_{енад}}{\Delta_e} \vec{a}^2 \eta_{eootp} \left\{ \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{eепрел} - \eta_{енад}) + (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) \left\{ \varepsilon_{o2} (\varepsilon_{o1} - \vec{a}^2) - \varepsilon_{o1} \eta_{енад} \eta_{eепрел} \right\} \right\} , \quad (48)$$

$$\begin{aligned} A_{eепрел} = & \frac{A_{енад}}{\Delta_e} \varepsilon_{o1} (\eta_{енад} - \eta_{eootp}) \left\{ \varepsilon_{o2} \vec{a}^2 (\vec{a}, \vec{c}_1) (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \eta_{eootp} - \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_1) \eta_{eootp} \left\{ (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 + (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1) \eta_{eепрел} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 + \eta_{eootp}^2 (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \right\} \right\} , \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{eепрел} = & \frac{A_{енад}}{\Delta_e} \varepsilon_{o1} (\vec{b}, \vec{c}_1) (\eta_{енад} - \eta_{eootp}) \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 \left\{ \eta_{eootp} - (\varepsilon_{o1} - \vec{a}^2) \right\} + \right. \\ & \left. + (\varepsilon_{o1} - \vec{a}^2) (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \eta_{eootp} (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) \right\} , \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_e \vec{a}^2 \left\{ \varepsilon_{o1} \varepsilon_{o2} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 \eta_{eootp} (\eta_{eootp} - \eta_{eепрел}) - \varepsilon_{o2} (\varepsilon_{o1} - \vec{a}^2) (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \eta_{eootp} (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) - \right. \\ \left. - \varepsilon_{o1} \vec{a}^2 \eta_{eепрел} \left\{ \varepsilon_{o1} (\vec{a}, \vec{c}_1)^2 (\eta_{eootp} - \eta_{eепрел}) - (\vec{b}, \vec{c}_1)^2 \eta_{eootp} \eta_{eootp} (\eta_{eепрел} - \eta_{eootp}) \right\} \right\} . \quad (51) \end{aligned}$$

СВЯЗЬ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ С КЛАССИЧЕСКИМИ ФОРМУЛАМИ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Выражения (15)-(19) и (41)-(45) представляют собой аналоги формул Френеля для случая падения монохроматического излучения на границу раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами и позволяют получать характеристики отражённых и преломлённых волн при известных параметрах падающей волны. Для проверки правильности полученных выражений нами был осуществлён переход от (15)-(19) и (41)-(45) к классическим формулам Френеля для изотропных сред. Для осуществления такого перехода в полученных для кристаллов формулах необходимо приравнять компоненты тензоров диэлектрической проницаемости, чтобы тензоры стали скалярными величинами: $\varepsilon_{e1} = \varepsilon_{o1} = n_1^2$, $\varepsilon_{e2} = \varepsilon_{o2} = n_2^2$. Параметры η_i и векторы рефракции для необыкновенных волн приравниваются к соответствующим параметрам и векторам рефракции обыкновенных волн; при этом нижние индексы o и e можно опустить. Единичные векторы \vec{c}_1, \vec{c}_2 , определяющие в кристаллах направления их оптических осей, при переходе к изотропным средам могут принимать любое направление. Для того, чтобы напряжённости электрического и магнитного полей в отражённых и преломлённых волнах выражались через проекции на плоскость падения и перпендикулярную к ней прямую, удобно приравнять $\vec{c}_1 = \vec{c}_2 = \vec{q}$. При осуществлении указанных замен, правые части выражений (16), (18), (41), (43) становятся равными нулю, так что имеем: $A_{eootp} = 0$, $A_{eепрел} = 0$, $A_{eootp} = 0$, $A_{eепрел} = 0$. Оставшиеся амплитудные множители для обыкновенных волн дадут компоненты поля, перпендикулярные плоскости распространения (что подчёркнуто добавлением верхнего индекса \perp), а

амплитудные множители для необыкновенных волн при переходе к изотропной среде станут компонентами поля, лежащими в плоскости распространения (что отмечено добавлением верхнего индекса \parallel). При этом амплитудные множители в изотропной среде принимают следующий вид:

$$A_{\text{ооотр}}^{\perp} = \frac{\eta_{\text{наод}} - \eta_{\text{прел}}}{\eta_{\text{наод}} + \eta_{\text{прел}}} A_{\text{онаод}}^{\perp}, \quad (52)$$

$$A_{\text{оопрел}}^{\perp} = \frac{2\eta_{\text{наод}}}{\eta_{\text{наод}} + \eta_{\text{прел}}} A_{\text{онаод}}^{\perp}, \quad (53)$$

$$A_{\text{ееоотр}}^{\parallel} = \frac{\eta_{\text{наод}} n_2^2 - \eta_{\text{прел}} n_1^2}{\eta_{\text{наод}} n_2^2 + \eta_{\text{прел}} n_1^2} A_{\text{енаод}}^{\parallel}, \quad (54)$$

$$A_{\text{еепрел}}^{\parallel} = \frac{2n_1^2 \eta_{\text{наод}}}{\eta_{\text{прел}} n_1^2 - \eta_{\text{наод}} n_2^2} A_{\text{енаод}}^{\parallel}. \quad (55)$$

С учётом того, что в изотропной среде справедливы следующие выражения:

$$\eta_{\text{наод}} = n_1 \cos \psi_{\text{прел}}, \quad (56)$$

$$\eta_{\text{прел}} = n_2 \cos \psi_{\text{прел}}, \quad (57)$$

$$n_1 \sin \psi_{\text{наод}} = n_2 \sin \psi_{\text{прел}}, \quad (58)$$

формулы (52)-(55) запишутся в следующем виде:

$$A_{\text{ооотр}}^{\perp} = -\frac{\sin(\psi_{\text{наод}} - \psi_{\text{прел}})}{\sin(\psi_{\text{наод}} + \psi_{\text{прел}})} A_{\text{онаод}}^{\perp}, \quad (59)$$

$$A_{\text{оопрел}}^{\perp} = \frac{2 \cos \psi_{\text{наод}} \sin \psi_{\text{прел}}}{\sin(\psi_{\text{наод}} + \psi_{\text{прел}})} A_{\text{онаод}}^{\perp}, \quad (60)$$

$$A_{\text{ееоотр}}^{\parallel} = \frac{\text{tg}(\psi_{\text{наод}} - \psi_{\text{прел}})}{\text{tg}(\psi_{\text{наод}} + \psi_{\text{прел}})} A_{\text{енаод}}^{\parallel}, \quad (61)$$

$$A_{\text{еепрел}}^{\parallel} = \frac{n_1}{n_2} \frac{2 \cos \psi_{\text{наод}} \sin \psi_{\text{прел}}}{\sin(\psi_{\text{наод}} + \psi_{\text{прел}}) \cos(\psi_{\text{наод}} - \psi_{\text{прел}})} A_{\text{енаод}}^{\parallel}. \quad (62)$$

Формулы (59)-(61) полностью совпадают с классическими формулами Френеля, а формула (62) отличается от соответствующей формулы Френеля множителем n_1/n_2 . Это отличие обусловлено тем, что в кристаллах падающая и преломлённая необыкновенные волны определяются формулами (30) и (34), а в изотропной среде соответствующие компоненты напряжённости электрического поля, лежащие в плоскости распространения, записываются следующим образом [1]:

$$\vec{E}_{\text{наод}}^{\parallel} = B_{\text{наод}}^{\parallel} [\vec{n}_{\text{наод}}, \vec{a}], \quad (63)$$

$$\vec{E}_{\text{прел}}^{\parallel} = B_{\text{прел}}^{\parallel} [\vec{n}_{\text{прел}}, \vec{a}]. \quad (64)$$

Подставляя в формулы для полей (30), (34), (63), (64) выражения для \vec{a} (3) и m_i (1), получаем:

$$\vec{E}_{\text{енаод}}^{\parallel} = -A_{\text{енаод}}^{\parallel} n_1^2 \{ \vec{n}_{\text{наод}} \cos \psi_{\text{наод}} - \vec{q} \}, \quad (65)$$

$$\vec{E}_{\text{еепрел}}^{\parallel} = -A_{\text{еепрел}}^{\parallel} n_1^2 \{ \vec{n}_{\text{прел}} \cos \psi_{\text{прел}} - \vec{q} \}, \quad (66)$$

$$\vec{E}_{\text{наод}}^{\parallel} = B_{\text{наод}}^{\parallel} n_1 \{ \vec{n}_{\text{наод}} \cos \psi_{\text{наод}} - \vec{q} \}, \quad (67)$$

$$\vec{E}_{\text{прел}}^{\parallel} = B_{\text{прел}}^{\parallel} n_1 \{ \vec{n}_{\text{прел}} \cos \psi_{\text{прел}} - \vec{q} \}. \quad (68)$$

Сравнивая (65) с (67), а (66) – с (68), получаем:

$$B_{\text{наод}}^{\parallel} = -A_{\text{енаод}}^{\parallel} n_1, \quad B_{\text{прел}}^{\parallel} = -A_{\text{еепрел}}^{\parallel} n_2, \quad (69)$$

что и обуславливает появление «лишнего» множителя в формуле (62).

Таким образом, при переходе от кристаллов к изотропным средам, формулы (15)-(19), (41)-(45) превращаются в классические формулы Френеля, что доказывает их правильность. С другой стороны, такой переход показывает, что классические формулы Френеля являются частным случаем решения более общей задачи: отражения и преломления монохроматического электромагнитного излучения на границе раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Упрощённые аналитические выражения (25)-(29), (47)-(51), полученные для частного случая, когда оптическая ось первого кристалла параллельна границе раздела сред, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред, были использованы для компьютерного моделирования процесса отражения и преломления лазерного излучения на границе раздела между слоем нервных волокон и стопками фоторецепторных дисков.

Для проведения компьютерного моделирования нами были взяты следующие значения показателей преломления рассматриваемых квазикристаллических сред сетчатки глаза:

показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в слое нервных волокон $n_o = 1,262$, $n_e = 1,263$ (определены по данным работы [4]);

показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в обесцвеченных фоторецепторных дисках $n_o = 1,382$, $n_e = 1,378$ (определены по данным работы [6]);

показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в темноадаптированных (необесцвеченных) фоторецепторных дисках $n_o = 1,418$, $n_e = 1,419$ (определены по данным работы [6]).

На рис.1 и рис.2 представлены трёхмерные графики напряжённостей электрического поля для волн,

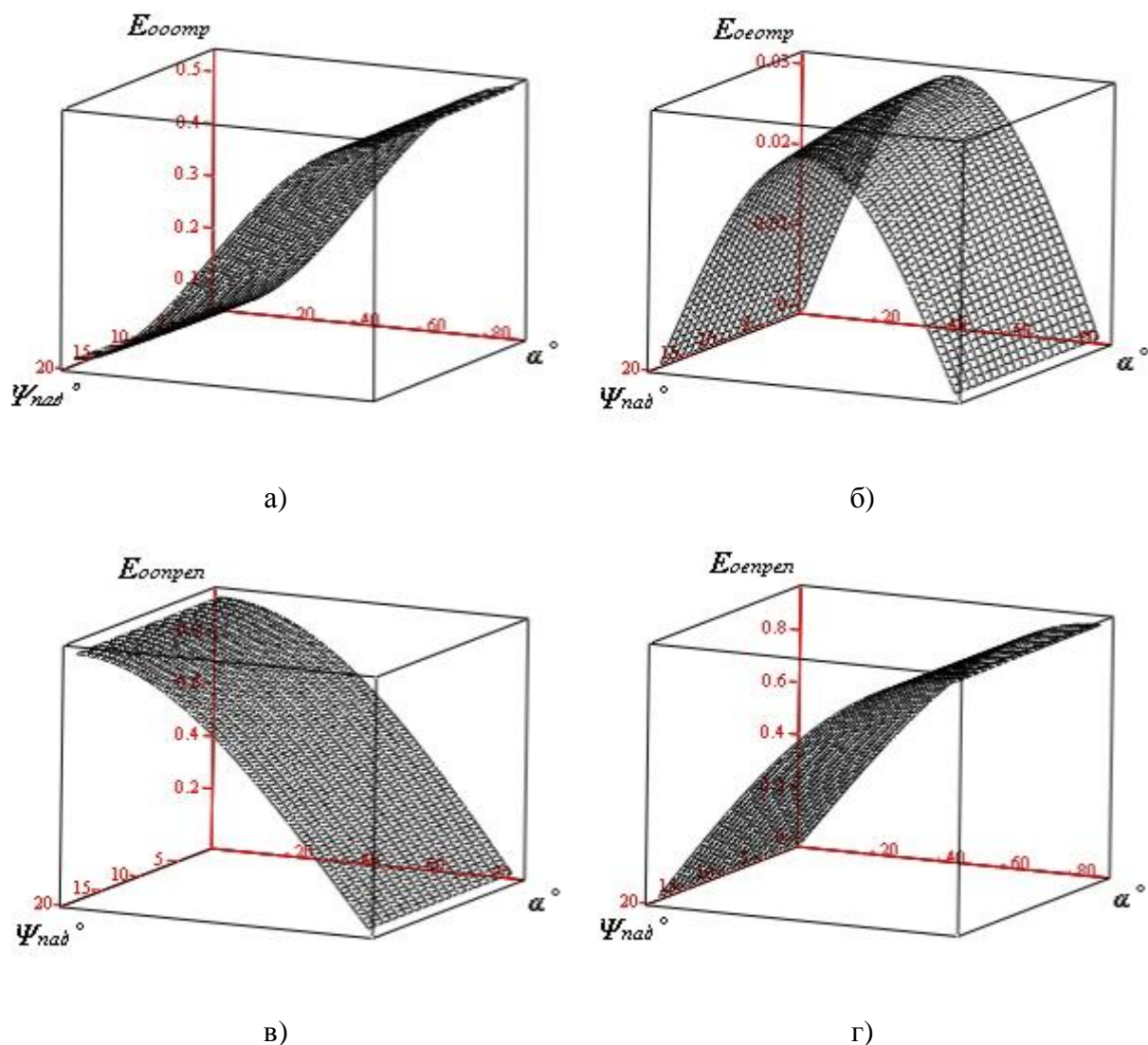


Рис. 1. Результаты компьютерного моделирования процесса отражения и преломления обыкновенной волны от границы раздела между слоем нервных волокон сетчатки и темноадаптированными фоторецепторными дисками: значения напряжённости электрического поля отражённой обыкновенной $E_{ооотр}$ (а), отражённой необыкновенной $E_{еотр}$ (б), преломлённой обыкновенной $E_{оопрел}$ (в) и преломлённой необыкновенной $E_{еопрел}$ (г) волн в зависимости от угла падения $\Psi_{пад}$ и угла α между плоскостью падения и оптической осью слоя нервных волокон

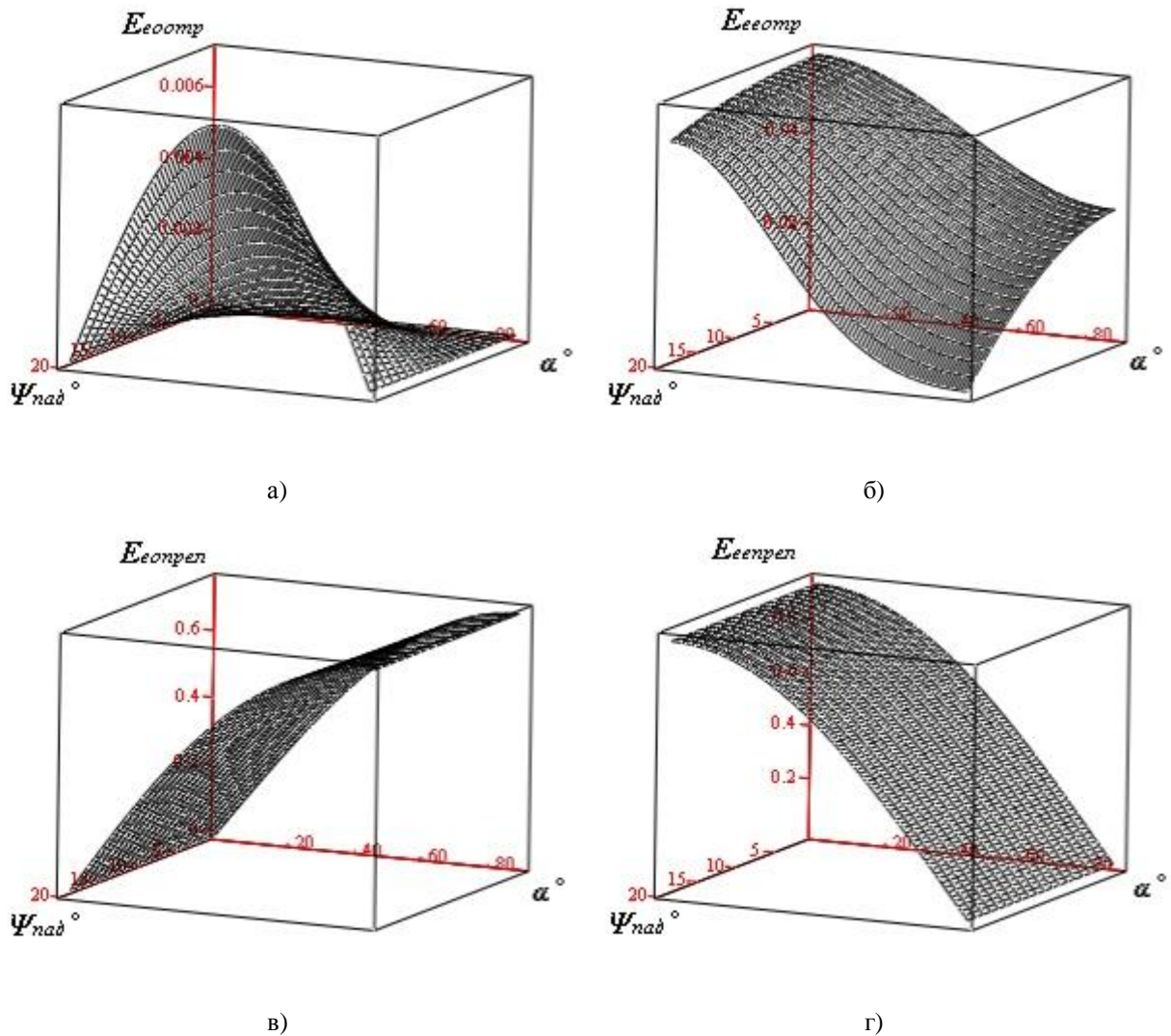


Рис. 2. Результаты компьютерного моделирования процесса отражения и преломления необыкновенной волны от границы раздела между слоем нервных волокон сетчатки и темноадаптированными фоторецепторными дисками: значения напряжённости электрического поля отражённой обыкновенной E_{eootp} (а), отражённой необыкновенной E_{eetr} (б), преломлённой обыкновенной E_{eopr} (в) и преломлённой необыкновенной E_{eopr} (г) волн в зависимости от угла падения ψ_{nad} и угла α между плоскостью падения и оптической осью слоя нервных волокон

отражённых и преломлённых на границе раздела между слоем нервных волокон и стопками темноадаптированных фоторецепторных дисков в зависимости от угла падения ψ_{nad} обыкновенной (рис.1) и необыкновенной (рис.2) волн на границу раздела, а также от угла α между плоскостью падения и оптической осью слоя нервных волокон. В естественных условиях значения угла ψ_{nad} ограничены раскрытием зрачка глаза, поэтому нами рассматривались значения $\psi_{nad} \leq 20^\circ$, а значения угла α были взяты в пределах от 0° до 90° . Проведенные нами расчёты показали, что для границы раздела между слоем нервных волокон и обесцвеченными дисками величины напряжённости электрического поля соответствующих волн отличаются по своей величине от рассмотренного случая с темноадаптированными фоторецепторными дисками не более чем на 23%, и форма графиков в обоих случаях оказывается одинаковой.

Как видно из приведенных на рис.1 и рис.2 графиков, в пределах рассматриваемых углов падения ($1^\circ \leq \psi_{nad} \leq 20^\circ$) как при падающей обыкновенной, так и при падающей необыкновенной волнах напряжённости обыкновенной и необыкновенной отражённых волн в целом оказываются меньше, чем напряжённости полей преломлённых (прошедших во вторую среду) обыкновенной и необыкновенной волн. Этот результат соответствует как общим физическим наблюдениям, так и экспериментально

наблюдаемым в глазу эффектам: при небольших углах падения света на сетчатку, обусловленных ограниченным раскрытием зрачка, от сетчатки отражается небольшая часть световой энергии, а большая часть попадает в фоточувствительный слой – слой фоторецепторных дисков, где и происходит регистрация оптической информации. При этом, как видно из приведенных графиков, при возрастании угла α в случае падения обыкновенной волны напряжённость электрического поля преломлённой обыкновенной волны уменьшается, а преломлённой необыкновенной волны – увеличивается, а для падающей необыкновенной волны – наоборот: с ростом α напряжённость электрического поля преломлённой обыкновенной волны увеличивается, а преломлённой необыкновенной волны – уменьшается.

ВЫВОДЫ

С помощью разработанного Ф.И. Фёдоровым метода получены аналоги формул Френеля для границы раздела между двумя одноосными прозрачными немагнитными кристаллами при произвольной ориентации в пространстве их оптических осей, которые позволяют получать характеристики отражённых и преломлённых волн при известных параметрах падающей волны. Показано, что классические формулы Френеля являются частным случаем формул, описывающих процессы отражения и преломления на границе раздела между двумя кристаллами. Получены также аналитические выражения для частного случая, когда оптическая ось первого кристалла параллельна, а оптическая ось второго кристалла перпендикулярна границе раздела сред. В качестве примера применения полученных аналогов формул Френеля проведено компьютерное моделирование процесса отражения и преломления лазерного излучения на границах разделов между слоем нервных волокон и стопками фоторецепторных дисков. Показано, что результаты компьютерного моделирования не противоречат имеющимся в литературе экспериментальным данным.

Представленные в данной статье аналитические выражения могут быть использованы при теоретических расчётах любых оптических систем, в которых имеется плоская граница раздела между двумя одноосными кристаллами, в частности, при анализе распространения лазерного излучения в макулярной области сетчатки человеческого глаза. Полученные результаты будут использованы для дальнейшего совершенствования голографической модели физиологической оптики, которая разрабатывается в лаборатории радио- и оптической голографии ХНУ им.В.Н.Каразина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фёдоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. М.: УРСС, 2004.-- 384 с.
2. Фёдоров Ф.И., Филиппов В.В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. Минск: Наука и техника, 1976. – 224 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. – 856 с.
4. H.V.klein Brink, G.J.van Blokland. Birefringence of the human foveal area assessed in vivo with Mueller-matrix ellipsometry. //Journal of the Optical Society of America. – 1988. – Vol. A5, N 1. – P. 49 – 57.
5. Hemenger R.P. Birefringence of a medium of tenuous parallel cylinders. // Appl. Optics. – 1989. – Vol. 28, N 18. – P. 4030 – 4034.
6. Liebman P.A., Jagger W.S., Kaplan M.W., Bargoot F.G. Membrane structure changes in rod outer segments associated with rhodopsin bleaching. // Nature. – 1974. – Vol. 251, N 6. – P. 31 – 36.
7. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Моделирование макулярных поляризационных эффектов в рамках голографической модели физиологической оптики // Прикл. радиоэлектрон. – 2009. – Т. 8, № 1. – С. 53 – 61.
8. Титарь В.П., Шпаченко О.В. Модельные исследования отражения лазерного излучения от слоёв сетчатки // «Лазеры. Измерения. Информация». Сб. докл. 19-й междунар. конф. Т. 1. – Санкт-Петербург: Из-во Политехнического ун-та, 2009. – С. 411 – 430.
9. Titar V.P., Shpachenko O.V. Reflection of laser radiation from retina quasi-crystal layers: model investigations // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2010. – Vol. 19, N 1. – P. 39 – 49.
10. Кравков С.В. Глаз и его работа. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. – 532 с.