УДК 537.87

НОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДЕШИФРИРОВАНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

И. А. Колтунов, А. Н. Думин, В. А. Катрич, Р. Р. Наумов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 61023, г. Харьков, пл. Свободы,4
e-mail:Alexander.N.Dumin@univer.kharkov.ua
Поступила в редакцию 2 марта 2011 г.

В статье изложены математические модели, вычислительные алгоритмы, а также перспективы развития и применения трёх новых методов *распознавания и классификации* (РИК): построение отличительных характеристик объектов; классификация на основе вероятностной обучающей выборки с оптимизацией метода РИК; учёт динамики признаков распознаваемых объектов. Распознавание и классификация – это область современной науки, имеющая необозримый перечень применений во всех сферах человеческой деятельности. Из всего перечня применений в предлагаемой работе выделено только одно, но самое актуальное – дистанционные исследования радиоизлучения земной поверхности с целью изучения и сохранения природных ресурсов Земли.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: методы распознавания и классификации (РИК), смесевые модели вероятностных распределений (СМРВ), обучающая выборка (ОВ).

У статті викладені математичні моделі, обчислювальні алгоритми, а також перспективи розвитку й застосування трьох нових методів розпізнавання й класифікації (РІК): побудова відмітних характеристик об'єктів; класифікація на основі імовірнісної навчальної виборки з оптимізацією методу РІК; врахування динаміки ознак розпізнаваних об'єктів. Розпізнавання й класифікація – це галузь сучасної науки, що має неозорий перелік застосувань у всіх сферах людської діяльності. Із усього переліку застосувань у пропонованій роботі виділене тільки одне, але найактуальныше – дистанційні дослідження радіовипромінювання земної поверхні з метою вивчення й збереження природних ресурсів Землі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: методи розпізнавання і класифікації (РІК), сумішеві моделі імовірнісних розподілів (СМІР), навчаюча вибірка (НВ).

Mathematical models, computational algorithms, and also prospects of development and application of three new methods of recognition and classification (RAC), namely, construction of distinctive characteristics of objects; classification on the basis of probabilistic teaching selection with optimization of method RAC; account of dynamics of features of recognized objects are presented in the article. Recognition and classification is an area of modern science that have a boundless list of applications in all spheres of human activity. From the list of applications the only one is selected in the present work, but the most actual one, that is the remote sensing of ground surface in radiofrequency band with the purpose of study and maintainance of natural resources of Earth.
KEYWORDS: methods of recognition and classification (RAC), blenderized models of the probabilistic distributing (BMPD), teaching selection (TS).

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие прикладных задач [1,2] привело к множеству методов и алгоритмов РИК, среди которых особое место занимают статистические методы и алгоритмы. Семейство статистических методов РИК, задаваемое *смесевыми моделями вероятностных распределений* (СМВР) признаков-характеристик для объектов *обучающей выборки* (ОВ) даёт вполне удовлетворительное решение большинству практических проблем [3 – 12].

Одной из таких проблем является дешифрирование дистанционных наблюдений Земли. Дистанционные наблюдения представляют собой наземные, самолётные и спутниковые измерения потока электромагнитных волн во всех диапазонах спектра излучения земных объектов. Дешифрирование полученных данных означает мониторинг, распознавание, классификацию и картографирование излучающих объектов [7 – 12].

Напомним основные базовые понятия статистической теории РИК на СМВР признаков-характеристик объектов [1, 7]. Статистическая теория на СМВР предоставляет семейство статистических методов РИК.

В статистическом методе РИК для построения функции принадлежности объекта определённомуклассу используется апостериорная условная вероятность наблюдаемого объекта при выполнении гипотезы об этом классе (вероятность Байеса), а в алгоритмическом обучении с помощью ОВ восстанавливается *закон распределения вероятностей* (ЗРВ) признаков-характеристик для объектов каждого класса.

Признак – количественное (в контексте этой статьи) свойство, присущее исследуемым объектам (число).

Объект – субстант, наделённый набором признаков-характеристик (вектор признаков).

Класс – гипотетическая сущность, объединяющая испытуемые объекты; определяется собственным ЗРВ объектов.

ОВ – множество объектов, заданное экспертом для расчёта ЗРВ каждого класса (матрица признаков-характеристик).

Характеристика объекта – функция от признаков объекта, построенная из предположения информационной зависимости исходных признаков.

СМВР – распределение, имеющее своей плотностью взвешенную сумму плотностей исходных вероятностных распределений.

Полигауссово распределение – смесь гауссовых распределений.

Правило распознавания – вектор, компоненты которого представляют собой число компонент в СМВР каждого класса; размерность этого вектора – число заданных классов.

Метод РИК определяется правилом распознавания и набором характеристик объектов [13].

Оптимальный статистический метод РИК – это такой метод, на котором сформулированный *критерий качества классификации* (ККК) имеет максимальное значение по двум оптимизируемым факторам – по правилу классификации и по набору характеристик объектов [14].

Статья состоит из трех разделов: отличительные характеристики объектов, классификация объектов на основе вероятностной обучающей выборке и учет динамики признаков классифицируемых объектов.

Первый раздел статьи включает два алгоритмически завершенных подраздела: линейный вариант решаемой задачи и нелинейное калибровочное преобразование первичных признаков; и третий подраздел, посвященный перспективам применения отличительных характеристик объектов.

В подразделе «Линейный вариант задачи» содержится математическая постановка задачи построения отличительных характеристик в случае, когда калибровочное и объектно-характеристическое преобразования линейны. Математическая постановка этой задачи представлена в виде уравнения характеристик. Далее изложены различные способы решения такого уравнения.

В подразделе «Нелинейное калибровочное преобразование» содержится математическая постановка и изложены способы решения задачи нахождения характеристик для случая, когда калибровочное преобразование нелинейно, однако вычисление калибровочных параметров сводится к оценке линейно входящих в это преобразование коэффициентов.

Третий подраздел «Перспективы применения отличительных характеристик объектов» содержит перечень трех ближайших и самых практически важных перспектив применения отличительных характеристик объектов для «сжатия исходной информации» и оптимального планирования эксперимента в общей проблеме классификации и распознавания.

Второй раздел статьи включает в себя две основные темы: оценочное восстановление плотности распределения для характеристик объектов вероятностной обучающей выборки с построением функции принадлежности распознаваемых объектов различным классам и использование информационной матрицы Фишера как критерия качества классификации. Построенный критерий качества классификации позволяет оптимизировать метод распознавания в семействе смесевых моделей вероятностного распределения признаков-характеристик.

Особого внимания заслуживает подраздел о перспективах совершенствования алгоритма обучения на вероятностной обучающей выборке с точки зрения развития всей статистической теории распознавания и классификации. Заметим, что схемы усовершенствованных алгоритмов обучения в настоящее время в стадии завершения разработок по всем перечисленным выше направлениям.

Третий раздел статьи включает в себя три темы: связь разведочного и учебных изображений; аналитические и эмпирические способы определения оператора связи; перспективы развития и применения динамической модели распознавания.

Подраздел «Связь разведочного и учебных изображений» представляет собой математическую постановку проблемы учета динамики признаков в частном варианте связи последовательности наблюдаемых изображений во времени.

В подразделе «Аналитические и эмпирические способы определения оператора *H*» предложены различные способы решения этой проблемы, включая известные и испытанные практикой алгоритмы, а также новые авторские разработки.

Последний подраздел показывает перспективы теоретического развития и актуального практического применения динамической модели распознавания при дистанционном исследовании радиоизлучения земной поверхности.

В заключении приведен перечень всех основных работ, которые необходимо выполнить для создания универсального и оптимального метода и комплекса компьютерных программ распознавания и классификации объектов земной поверхности на основе дистанционных наблюдений.

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТОВ

Эмпирические аналоги предлагаемого метода построения отличительных характеристик объектов рассматриваются в работах [7,8,10,12]. Математическая постановка этой задачи содержится в докладе [13] и статье [14] в виде общего уравнения характеристик. В настоящей работе обсудим методы решения этого уравнения в определённых предположениях о линейности и квазилинейности калибровочного и объектнохарактеристического преобразований.

Исходные данные многоканальных дистанционных наблюдений (это могут быть, в частности, результаты мультиспектральных либо разновременных съёмок) представляют собой матрицу Z размерности ($m \times n$) : $Z = \{Z_k\}_{k=1}^{n} = \{z_{ik}\}_{i=1,k=1}^{m,n}$; k – номер объекта; k = 1,2, …, n; i = 1,2, …, m; – номер признака объекта.

Линейный вариант задачи

Выполним линейное калибровочное преобразование элементов матрицы Z с коэффициентами калибровки b_{0i} и b_{1i}, зависящими от признаков, но не зависящими от объектов:

$$y_{ik} = b_{0i} + b_{1i} \cdot z_{ik} \tag{1}$$

С другой стороны, предполагаем, что преобразованные признаки y_{ik} есть ординаты точек на гиперплоскостях $Y_k = A_k \cdot X$ объектов:

$$y_{ik} = a_{0k} + \sum_{l=1}^{p} a_{lk} \cdot x_{il} \tag{2}$$

В выражении (2) коэффициенты $A_k = \{a_{lk}\}_{l=1}^{p}$ являются характеристиками (векторами характеристик) объекта с номером k; точку $X_i = \{x_{il}\}_{l=1}^{p}$ координатной гиперплоскости X размерности p назовём граундфактором признака с номером i.

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим уравнение характеристик

$$b_{0i} + b_{1i} \cdot z_{ik} = a_{0k} + \sum_{l=1}^{p} a_{lk} \cdot x_{il} \ , \tag{3}$$

в котором кроме искомых характеристик A_k присутствуют «мешающие» неизвестные параметры – калибровочные коэффициенты b_i и граундфакторы X_i.

Равенство (3) представляет собой систему ($n \times m$) уравнений относительно $(p+2) \cdot m + (p+1) \cdot n$ неизвестных. При заданном p и достаточно больших m и n система (3) становится «замкнутой» – число неизвестных не превышает числа уравнений, однако вследствие её нелинейности эта система не имеет единственного решения.

Единственность решения достигается введением так называемых <u>опорных признаков</u>. На опорных признаках калибровочные коэффициенты и граундфакторы полагаются известными. Если количество опорных признаков взять равным числу искомых характеристик у каждого объекта, то получаем n систем $p+1$ линейных уравнений относительно $p+1$ неизвестных характеристик. При невырожденности матриц этих систем уравнений характеристики для всех объектов могут быть получены. Для проверки адекватности моделей (1) и (2) относительно наблюдаемой матрицы признаков $Z = \{z_{ik}\}$ в уравнении (3) при полученных характеристиках $\{\overline{A}_k\}_{k=1}^{n}$ решим ($m - p - 1$) систем из n уравнений относительно $p+2$ неизвестных граундфакторов и калибровочных коэффициентов для признаков, не являющихся опорными. При условии, что для m (число признаков) и $p+1$ (число характеристик) выполняется неравенство $m \gg p+1$, все системы уравнений переопределены. Если невязки во всех уравнениях оказались равными нулю, можно сделать вывод об адекватности моделей преобразований (1) и (2) относительно наблюдения $Z = \{z_{ik}\}$ и проблема полностью решена.

Однако на практике измерения признаков z_{ik} не являются безошибочными. Относительно ошибок в измерении признаков сделаем два вполне допустимых предположения: а) ошибка в z_{ik} является нормально распределённой случайной величиной, не зависящей от объекта; б) среднеквадратичная величина случайной ошибки для всех признаков априори известна и равна $\sigma_i (i = 1,2\ldots,m)$.

Укажем основные пункты алгоритма в решении задачи вычисления характеристик объектов при сделанных выше предположениях:

1) Применение метода максимального правдоподобия для оценки неизвестных параметров a, b, X системы уравнений (3) приведёт к методу наименьших квадратов [15, 16]:

$$\min_{a,b,X} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_{1i}^2 \cdot \sigma_i^2} \sum_{k=1}^{n} \left[b_{0i} + b_{1i} \cdot z_{ik} - a_{0k} - \sum_{l=1}^{p} a_{lk} \cdot x_{il} \right]^2 . \qquad (4)$$

2) Как указывалось выше, для получения единственного решения этой задачи нужно использовать метод опорных признаков. При назначении $p+1$ опорных признаков имеет смысл учесть два условия: а) чтобы величина $\Delta_i^2 = b_{1i}^2 \cdot \sigma_i^2$ была как можно меньше; б) чтобы попарные ковариационные моменты у опорных признаков были также как можно меньше – максимальная независимость.

3) Для удобства записи формул предполагаем, что опорными являются признаки с первыми номерами $i = 1,2,\ldots,p+1$. Калибровочные коэффициенты выберем равными: $b_{0i} = 0$, $b_{1i} = 1$, $i = 1,2,..,p+1$. Это означает, что опорные признаки не калибруются. Граундфакторы этих признаков положим следующими. Признак с номером $p+1$ имеет граундфактором начало координат: $0,0,\ldots,0$; признаки с номерами $i = 1,2,..,p$ имеют граундфакторами точки «1» на осях с номерами $i : 0,0,\ldots,1,\ldots,0$. Это означает, что на всех осях введены единицы измерения.

4) При вышеназванном выборе опорных признаков формула (4) переписывается так:

$$\begin{aligned} \chi_{\min}^2 = \min_{a,b,X} \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{p} [\frac{1}{\sigma_i^2}(z_{ik} - a_{0k} - a_{1k})^2] + \frac{1}{\sigma_{p+1}^2}(z_{p+1,k} - a_{0k})^2 + \\ & + \sum_{i=p+2}^{m} \frac{1}{b_{1i}^2 \cdot \sigma_i^2}(b_{0i} + b_{1i} \cdot z_{ik} - a_{0k} - \sum_{l=1}^{p} a_{lk} \cdot x_{il})^2 \Bigg\} \end{aligned} \qquad (5)$$

5) В качестве начального приближения в решении задачи оптимизации (5) следует взять расчёт характеристик объектов, граундфакторов и калибровочных коэффициентов признаков из уравнения (3) методом опорных признаков в предположении отсутствия ошибок ($\sigma_i = 0$) в измерениях z_{ik}.

6) Если модели калибровочного и объектнохарактеристического преобразований в уравнении характеристик (3) адекватны наблюдениям z_{ik}, то полученное в результате оптимизации значение квадратичного функционала $\chi_{\min}^2$ будет удовлетворять неравенству [16, 17]:

$$\chi_{\min}^2 / N \le 1,$$

где $N = n \times m$ – число уравнений в системе (3).

7) Модель (2) можно попытаться сжать, т. е. уменьшить значение p. Если же неравенство пункта 6) не выполняется, модель нужно расширить, увеличив значение p. После этого все пункты 1) – 7) решения задачи расчёта характеристик объектов необходимо повторить.

Нелинейное калибровочное преобразование

Калибровочное преобразование $Y = B_i(Z)$ элементов z_{ik} матрицы наблюдений Z, зависящее только от признаков, но не зависящее от объектов, будучи взаимно однозначным, не изменяет классификационной информативности откалиброванных признаков y_{ik}. Поэтому оно может быть нелинейным. Понятно, что равномерность измерительных шкал признаков – понятие относительное, точнее, условное. Более того, в вычислительном плане калибровочное преобразование стоит сделать сколь угодно сложным с тем, чтобы объектнохарактеристическое преобразование в (3) максимально упростить по количеству характеристик объектов. В практической реализации метода построения отличительных характеристик можно предложить следующий компромисс: калибровочное преобразование нелинейно, а калибровочные параметры являются линейными коэффициентами при нелинейных, но монотонных функциях $\varphi_j(z_{ik})$, $j = 1,2,\ldots,r$:

$$Y = B_i(Z) \ \Leftrightarrow \ y_{ik} = \sum_{j=1}^{r} b_{ji} \cdot \varphi_j(z_{ik}) \tag{6}$$

Тогда уравнение характеристик примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{r} b_{ji} \cdot \varphi_j(z_{ik}) = a_{0k} + \sum_{l=1}^{p} a_{lk} \cdot x_{il} \,. \tag{7}$$

Система уравнений (7) включает (m x n) уравнений с числом неизвестных $(1+p)\cdot n + (r+p)\cdot m$. Пусть линейное калибровочное преобразование (1) входит частным случаем в нелинейное (6), т. е. $\varphi_1(z_{ik}) = 1$, $\varphi_2(z_{ik}) = z_{ik}$ а остальные функции $\varphi_j(z_{ik})$ будут произвольными непрерывно дифференцируемыми монотонными функциями аргумента z_{ik} (например, степенными с нечётными показателями степени). Для получения единственного решения системы уравнений (7) , как и прежде, воспользуемся методом опорных признаков. Число опорных признаков, по-прежнему, равно числу характеристик объектов ($p+1$) . Калибровочные коэффициенты зафиксируем в следующем виде:

$$b_{1i} = 0\ ;\ \{b_{j1} = 0\}_{j=3}^{r};\ b_{2i} = 1\,.$$

Это означает, что опорные признаки, как и прежде, не калибруются. Граундфакторы опорных признаков берутся: X_1 в начале координат и X_i , ($i = 2,3,\ldots,p+1$) отсекают единичные отрезки на всех осях координатной гиперплоскости. Вычисления ведутся по вышеуказанной схеме (1–7). Для удобства записи последующей формулы (8) введём обозначение частной производной:

$$\frac{\partial}{\partial z_{ik}}[B_i(Z)] = y'_{ik}(b)\,.$$

При неточном измерении признаков z_{ik} метод максимального правдоподобия приводит к следующей задаче оптимизации:

$$\begin{aligned}\chi^2_{\min} = \min_{a,b,X} \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{p} [\frac{1}{\sigma_i^2}(z_{ik} - a_{0k} - a_{1k})^2] + \frac{1}{\sigma_{p+1}^2}(z_{p+1,k} - a_{0k})^2 + \\ & + \sum_{i=p+2}^{m} \frac{1}{[y'_{ik}(b)\cdot\sigma_i]^2}[\sum_{j=1}^{r} b_{ji}\cdot\varphi_j(z_{ik}) - a_{0k} - \sum_{l=1}^{p} a_{lk}\cdot x_{il}]^2 \Bigg\}.\end{aligned} \tag{8}$$

При этом, если выполняется для функционала $\chi^2_{\min}$ (8) неравенство

$$\chi^2_{\min} \,/\, N \le 1\,,$$

то модели для калибровочного (6) и для объектнохарактеристического (2) преобразований полагаем адекватными наблюдениям z_{ik} в уравнении характеристик (7). Если в проверяемом неравенстве стоит обратный знак, то обе модели нужно попытаться расширить, последовательно увеличивая r и p .

На более детальном статистическом анализе проверки адекватности моделей останавливаться не будем: такой анализ потребует отдельного исследования и дальнейших публикаций.

Перспективы применения отличительных характеристик объекта

Предложенный метод построения характеристик объектов может быть использован при более общих нелинейных калибровочном и объектнохарактеристическом преобразованиях.

Предложенный метод будет применён для выбора небольшого числа ($\approx p$) информативных каналов при мульти- и гиперспектральных съёмках в планировании дистанционного эксперимента регрессионным анализом.

Предложенный метод окажется полезным в решении не только задач дистанционного зондирования, но и любых проблем диагностики, распознавания образов, обнаружения и классификации целей, как новый метод «сжатия информации» без обучающей выборки и прежде всего, когда наблюдаемые объекты обладают большим количеством разнородных признаков различной физической природы.

КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ (ВОВ)

Классификация объектов на основе ВОВ рассматривалась в работах [14, 18]. Обсуждение этой проблемы в работе [14] ограничилось математической постановкой частных задач без детального рассмотрения сложных вычислительных алгоритмов. В работе [18] более подробно рассмотрен вычислительный EM-алгоритм оценки параметров ЗРВ каждого класса. Однако для выполнения надёжной классификации объектов такого рассмотрения без привлечения *информационной матрицы Фишера* (ИМФ) недостаточно.

Оценка параметров ЗРВ для характеристик объектов ВОВ и построение функции принадлежности объекта классу

Следуя обозначениям и рассуждениям работы [14], наблюдение $Z=\{z_{ik}\}_{i=1,k=1}^{m,n}$ представляет собой реализацию случайной матрицы, элементы которой являются характеристиками объектов Z_k ($k=1,2,\dots,n$) ВОВ. Это означает, что наблюдаемый случайный объект Z_k имеет плотность распределения вероятностей φ_k :

$$\varphi_k=\sum_{s=1}^{Q}\rho_s^k\cdot\sum_{r=1}^{V_s}q_r^s\cdot N(Z_k,A_r^s,G_r^s), \tag{9}$$

где Q – число распознаваемых классов, V_s – число гауссовых компонент в классе с номером s, ρ_s^k – вероятность принадлежности объекта с номером k классу с номером s, q_r^s – вероятность объекта класса s попасть в компоненту с номером r, A_r^s – вектор средних значений компоненты с номером r класса s, G_r^s – ковариационная матрица компоненты с номером r класса s, $N(Z_k,A_r^s,G_r^s)$ – плотность распределения Гаусса с вектором средних значений A_r^s и матрицей ковариаций G_r^s :

$$N(Z_k,A_r^s,G_r^s)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left|G_r^s\right|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp[-\frac{1}{2}(Z_k-A_r^s)^T\cdot\left(G_r^s\right)^{-1}\cdot(Z_k-A_r^s)], \tag{10}$$

На вероятности ρ_s^k и q_r^s наложены ограничения:

$$\sum_{s=1}^{Q}\rho_s^k=1,\ \rho_s^k\ge 0,\ \sum_{r=1}^{V_s}q_r^s=1,\ q_r^s>0 \tag{11}$$

В предлагаемом (первом) варианте алгоритма классификации объектов полагаем наблюдаемые объекты ВОВ независимыми. Тогда для плотности распределения $\Phi(Z)$ матрицы наблюдений Z справедливо представление:

$$\Phi(Z)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(Z_k) \tag{12}$$

или для *логарифмической функции правдоподобия* (ЛФП):

$$l(\alpha)=\ln\Phi(Z^0)=\sum_{k=1}^{n}\ln\varphi_k(Z_k), \tag{13}$$

где Z^0 – реализация случайной величины Z. Под совокупностью регулярных параметров α ЛФП $l(\alpha)$ понимаем q_r^s,A_r^s,G_r^s для всех значений r и s. При построении уравнений правдоподобия необходимо учесть ограничение (11) на коэффициенты q_r^s (метод Лагранжа). Число классов Q и все вероятности ρ_s^k полагаем заданными. Неизвестные количества гауссовых компонент V_s во всех классах на первом этапе оценки параметров α также считаем заданными, однако к проблеме оценки этих целочисленных неизвестных вернёмся, по крайней мере, дважды. Необходимые условия экстремума ЛФП $l(\alpha)$ (13) с учётом ограничений (11) приводят к системе уравнений правдоподобия, записанной в форме, удобной для итераций.

Итерационные формулы EM-алгоритма

Уравнение ковариационного эллипсоида:

$$R_r^{ks} = (Z_k - A_r^s)^T \cdot H_r^s \cdot (Z_k - A_r^s)\ ;\ H_r^s = (G_r^s)^{-1}$$

Плотность распределения Гаусса:

$$N(Z_k, A_r^s, G_r^s) = \frac{\left|H_r^s\right|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \cdot \exp[-\frac{1}{2} R_r^{ks}]$$

Условная плотность распределения объекта ВОВ с номером k в предположении принадлежности классу s:

$$f_s(Z_k) = \sum_{r=1}^{V_s} q_r^s \cdot N(Z_k, A_r^s, G_r^s)$$

Плотность распределения объекта с номером k, принадлежащего ВОВ:

$$\varphi_k(Z_k) = \sum_{s=1}^{Q} \rho_s^k \cdot f_s(Z_k)$$

Вероятность принадлежности объекта с номером k компоненте r класса s:

$$\omega_r^{ks} = \frac{\rho_s^k \cdot q_r^s \cdot N(Z_k, A_r^s, G_r^s)}{\varphi_s(Z_k)}$$

Весовой коэффициент компоненты с номером r класса с номером s:

$$q_r^s = \frac{U_r^s}{W^s}\ ;\ U_r^s = \sum_{k=1}^{n} \omega_r^{ks}\ ;\ W_s = \sum_{r=1}^{V_s} U_r^s$$

Вектор средних значений компоненты r класса s:

$$A_r^s = \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_r^{ks} \cdot Z_k}{U_r^s}$$

Матрица ковариаций компоненты с номером r класса с номером s:

$$G_r^s = \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_r^{ks} \cdot D_r^{ks}}{U_r^s}\ ;\ D_r^{ks} = \cdot(Z_k - A_r^s) \cdot (Z_k - A_r^s)^T$$

Вероятность Байеса – функция принадлежности объекта Z_k классу с номером s; $P_s = p(H_s)$ – априорная вероятность класса с номером s:

$$P(s/k) = P(H_s / Z_k) = \frac{P_s \cdot f_s(Z_k)}{f(Z_k)}\ ;\ f(Z_k) = \sum_{s=1}^{Q} P_s \cdot f_s(Z_k)$$

Критерий окончания итерационного процесса; ν – номер последней итерации:

$$\max_{k,s}\left|P_{\nu-1}(H_s / Z_k) - P_\nu(H_s / Z_k)\right| \le \varepsilon$$

Оценка числа компонент СМВР

На параметрах $\alpha = \{q, A, G\}$, полученных итерационным процессом, вычислим ЛФП $l(\alpha)$ (13). Затем увеличим на единицу число компонент V_s в одном из классов, повторим итерационный процесс и заново вычислим $\max\limits_{\alpha} l(\alpha)$. Если повторно вычисленный максимум ЛФП оказался существенно большим, то продолжаем постепенное (на единицу) увеличение числа компонент вначале в этом же классе, а затем в других классах. Это увеличение числа компонент идёт до тех пор, пока существенный рост $\max\limits_{\alpha} l(\alpha)$ не прекратится. Прекращение роста $\max\limits_{\alpha} l(\alpha)$ свидетельствует о том, что выполняется альтернатива: либо найдено правильное число компонент во всех классах, либо дальнейшему увеличению числа компонент препятствует ограниченность объёма ВОВ. И в том, и в другом варианте процедуру увеличения числа компонент во всех классах оканчиваем.

Перспективы совершенствования алгоритма обучения на ВОВ

Проблему оценки параметров ЗРВ для СМВР характеристик объектов ВОВ в предположении полигауссовости СМВР можно было бы считать решённой при учёте нескольких существенных замечаний.

а) Скорость и правильность сходимости указанного итерационного процесса зависит от выбора начальных приближений оцениваемых параметров. Этому вопросу посвящена работа [18]. Однако именно для объектов ВОВ считать решённой эту проблему преждевременно, необходимо продолжить исследования.

б) Совокупность параметров α, как показывает практика обработки дистанционных наблюдений, может быть связана дополнительными условиями . Игнорировать эти связи нецелесообразно, так как учёт таких связей приводит к более простым вычислениям и к более простой экспертизе [18].

в) *Метод максимального правдоподобия* (ММП), являясь оптимальным методом оценки неизвестных параметров распределения с точки зрения классической статистики, тем не менее, не исключает применение других методов математической обработки данных, менее громоздких в вычислениях.

г) В дальнейшем будет полезным, и даже необходимым, использовать СМВР характеристик объектов с негауссовыми компонентами, например, когда компоненты многомерных распределений не являются симметричными относительно векторов средних значений.

д) В перспективе космических исследований понятно, что гипотеза о независимости наблюдаемых объектов ВОВ должна быть снята . Каким видом зависимости (может быть, марковской) эта гипотеза должна быть заменена, чтобы обеспечить практически выполнимый объём вычислительных работ по классификации объектов – проблема остаётся нерешённой [5].

е) Как было указано выше, в качестве функции принадлежности объекта классу берётся *байесова вероятность* (БВ)

$$P(s/k) = P(H_s / Z_k) = \frac{P_s \cdot f_s(Z_k)}{f(Z_k)},$$

где $P_s = P(H_s)$ – априорная вероятность класса (гипотезы) с номером s. Если эта вероятность P_s экспертом не задана, она может быть оценена для исследуемого участка местности итерационным методом, где для последующей итерации априорная вероятность класса полагается равной средней апостериорной вероятности на предыдущей итерации для этого участка:

$$P_s = \frac{\sum_{k=1}^{L} P(s/k)}{L}; \quad (s = 1,2,\ldots,Q),$$

здесь L – число объектов всего изучаемого участка.

ж) Для визуального контроля качества работы программного комплекса на имитационных примерах имеет смысл число классов выбрать равным трём: да (красный), не ясно (зелёный), нет (синий), построить в цветовых символах яркости – от красного до синего – три карты БВ для классов изучаемого участка и затем произвести RGB-синтез этих трёх карт БВ.

Информационная матрица Фишера в статистической теории РИК

Наделить статистические методы РИК такими качествами, как точность, надёжность и достоверность классификации, можно, используя *информационную матрицу Фишера* (ИМФ) [16,17]. Пусть наблюдаемая случайная матрица Z объектов ВОВ имеет плотность распределения характеристик $\Phi(Z)$. ИМФ для неизвестных параметров α, входящих в ЗРВ наблюдения Z, называется интеграл:

$$I(\alpha) = \int\limits_{B(Z)} \nabla_{\alpha}[\ln \Phi(Z) \cdot \nabla_{\alpha}^{T}[\ln \Phi(Z)] \cdot \Phi(Z) dZ\,; \; B(Z) = \{Z : \Phi(Z) \neq 0\}, \tag{14}$$

где символ ∇_{α} означает градиент функции, взятый по всем её неизвестным па6раметрам α; ∇_{α}^{T} означает транспонирование вектора ∇_{α}. Если на ($n \times m$)-мерную область интегрирования $B(Z) \subseteq R^{(n \times m)}$ наложить требование независимости от параметров α, то для $I(\alpha)$ справедливо эквивалентное выражение

$$I(\alpha) = -\int\limits_{B(Z)} \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\alpha^T}[\ln \Phi(Z) \cdot] \cdot \Phi(Z) dZ$$

которое используется в ряде работ [19, 20, 21]. При независимости наблюдаемых объектов Z_k, ($k = 1,\ldots,n$) ВОВ для ИМФ выполняется равенство

$$I(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\int_{b(Z)}\nabla_{\alpha}[\ln\varphi_k(Z,\alpha)]\cdot\nabla_{\alpha}^{T}[\ln\varphi_k(Z,\alpha)]\cdot\varphi_k(Z,\alpha)dZ \tag{15}$$

где область $b(Z)\subseteq R^m$ есть проекция области $B(Z)$ в $R^m\subset R^{(n\times m)}$.

В частном случае, когда $\varphi_k(Z)$ представляет собой двойную полигауссову смесь:

$$\varphi_k(Z)=\sum_{s=1}^{Q}\rho_s^k f_k(Z)\,;\ \forall_{k=1}^{n}[(\sum_{s=1}^{Q}\rho_s^k=1);\ \rho_s^k\geq 0]\,;$$

$$f_s(Z)=\sum_{r=1}^{V_s}q_r^s\cdot\ N(Z,A_r^s,G_r^s)\,;\ \forall_{s=1}^{Q}[(\sum_{r=1}^{V_s}q_r^s=1);\ q_r^s\geq 0]\,;$$

$$N(Z,A_r^s,G_r^s)=\frac{\left|H_r^s\right|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{r}}}\cdot\exp[-\frac{1}{2}(Z-A_r^s)^T\cdot H_r^s\cdot(Z-A_r^s)]\,,$$

где $N(Z,A_r^s,G_r^s)$ – m-мерная плотность распределения Гаусса, получаем для ИМФ следующую формулу:

$$I(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{Q}\rho_s^k\cdot\sum_{r=1}^{V_s}q_r^s\cdot I_{r,s}^k$$

$$I_{r,s}^k=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{m}\ldots\int\nabla_{\alpha}[\ln\varphi_k(Z,\alpha)]\cdot\nabla_{\alpha}^{T}[\ln\varphi_k(Z,\alpha)]\cdot N(Z,A_r^s,G_r^s)dZ \tag{16}$$

Расчёты интегралов $I_{r,s}^k$ производятся методом Монте-Карло

$$I_{r,s}^k\approx\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\nabla_{\alpha}\ln[\varphi_k(Z_l,\alpha)]\cdot\nabla_{\alpha}^{T}[\ln\varphi_k(Z_l,\alpha)]$$

где Z_l ($l=1,2,\ldots,M$) – случайные векторы с m-мерной гауссовой плотностью распределения $N(Z,A_r^s,G_r^s)$. Вычисление этих интегралов требует учёта связей между коэффициентами q_r^s:

$$\forall_{s=1}^{Q}(\sum_{r=1}^{V_s}q_r^s=1)\,.$$

В дальнейшем при вычислении интегралов (16) нужно учесть целый ряд факторов, ведущих к сокращению счётных работ: ИМФ во многих задачах квазидиагональна.

Имея ИМФ, можно оценить точность оценок ММП для параметров α, полученных ранее в итерационном процессе. Известна [22] асимптотическая формула

$$\lim_{n\to\infty}I(\alpha)\cdot K(\alpha)=E\,, \tag{17}$$

где E – единичная матрица, $K(\alpha)$ – ковариационная матрица оценок ММП, n – объём ВОВ. На диагонали $K(\alpha)$ стоят квадраты среднеквадратичных ошибок (СКО) в оценках ММП, в том числе квадраты СКО весовых коэффициентов q_r^s. Обозначим СКО q_r^s символом $\Delta\,q_r^s$. Отношение $q_r^s\,/\,\Delta\,q_r^s$ назовём значимостью q_r^s и обозначим $\zeta\ q_r^s$:

$$\zeta\ q_r^s=\ q_r^s\,/\,\Delta\,q_r^s \tag{18}$$

Выбрав определённый порог δ, назовём компоненту СМВР значимой, если $\zeta\ q_r^s\geq\delta$, и незначимой, если $\zeta\ q_r^s<\delta$. Ликвидируя незначимые компоненты СМВР, получаем ещё одну оценку для дискретных параметров V_s в СМВР характеристик объектов каждого класса $s=1,2,..,Q:V_s$ равняется числу значимых компонент этого класса.

Ковариационная матрица оценок ММП, исходя из [16] линейной теории ошибок, даёт формулу расчёта СКО в БВ $P(s/k)$ принадлежности объекта Z_k классу с номером s:

$$\Delta P(s/k)=\nabla_{\alpha}^{T}[P(s/k)]\cdot K(\alpha)\cdot\nabla_{\alpha}[P(s/k)]\,. \tag{19}$$

Назовём *критерием качества классификации* (ККК) метода РИК выражение:

$$K = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \max_{s}[\Delta P(s/k) - \gamma \Delta P(s/k)], \tag{20}$$

где γ – заданный коэффициент надёжности метода РИК. Разницу между БВ и СКОБВ (с коэффициентом γ) назовём нижней доверительной границей БВ (НДГБВ). Значит, ККК представляет собой среднее значение на объектах ВОВ для НДГБВ, максимальных в алфавите классов.

Построение оптимального метода РИК на основе ККК

Метод РИК на СМВР определяется двумя основными факторами: набором характеристик объектов и правилом классификации. Правило классификации на СМВР однозначно диктуется числом компонент СМВР каждого класса.

Значит, как указано выше, правило классификации это Q-мерный вектор, компоненты которого являются числами компонент СМВР каждого класса.

Наборы характеристик объектов это также вектора – вектора с переменным числом компонент. Каждая компонента этих векторов представляет собой номер поименованной характеристики объектов.

Метод РИК на СМВР называется оптимальным, если на двух факторах – набор компонент и правило классификации – этот метод имеет максимальный ККК.

Траекторией оптимизации метода РИК называется последовательность выбираемых точек на гиперплоскости: «набор характеристик, правило классификации», и эта последовательность ведёт к точке оптимального метода РИК.

Соседними точками на гипероси: «набор характеристик» называются такие два набора, которые отличаются лишь одной характеристикой. У соседней точки может быть на одну характермстику больше (меньше), либо может быть произведена одна замена характеристики.

Соседними точками на гипероси: «правило классификации» называются такие два правила, которые отличаются только одной компонентой в количестве компонент СМВР лишь в одном классе. Это означает, что для соседних правил в одном классе может быть на одну компоненту больше (меньше) по сравнению с соседом.

Соседними точками на гиперплоскости называются такие точки, обе координаты которых являются соседними, либо одна из координат повторена, а другая является соседом.

Топологической окрестностью точки на гиперплоскости называется множество всех её соседей.

Непрерывной траекторией оптимизации метода РИК называется такая последовательность точек, ведущих к оптимальному методу, где каждая последующая точка лежит в топологической окрестности предыдущей точки.

Оптимальный метод строится на непрерывных траекториях, где каждая последующая точка имеет ККК больший, чем предыдущая.

УЧЁТ ДИНАМИКИ ПРИЗНАКОВ КЛАССИФИЦИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Пусть $Z = \{z_{ik}\}_{i+1,k+1}^{m,n}$ – дистанционное наблюдение участка земной поверхности, полученное в виде многоканального цифрового изображения этого участка. Единичным объектом цифрового изображения является один пиксель, излучающий электромагнитные волны во всех наблюдаемых каналах информации, например, во всех регистрируемых спектральных диапазонах. Излучение в одном спектральном диапазоне – это один признак объекта. Предметом нашего изучения будет изменение во времени излучения одного спектрального диапазона всего изображения (в изменяющихся внешних условиях) и учёт этого изменения при классификации объектов (пикселей) на изображении. Эта проблема рассматривалась, решалась и прошла успешные практические испытания в работах [11, 12, 23, 24]. Нашей задачей будет обобщение вида динамики признаков по сравнению с указанными работами. Для упрощения записи изучаемый признак обозначим Z без индексов, а вместо дискретного индекса объекта ($k = 1,2,\dots,n$) введём непрерывную величину S – местоположение признака:

$$Z = f(S,t), \tag{21}$$

где t – время наблюдения.

Связь разведочного и учебных изображений

Предполагаем, что излучение Z локального однородного участка земной поверхности зависит от его внутренних свойств $U_1(S)$, $U_2(S)$,…, $U_r(S)$, мало меняющихся со временем, и внешних факторов, $V_1(t)$, $V_2(t)$, … , $V_p(t)$, почти не зависящих от местоположения этого участка:

$$Z = W[U_1(S),\ U_2(S)\ ,...,\ U_r(S);\ V_1(t),\ V_2(t)\ ,...,\ V_p(t)] \tag{22}$$

Проведём r измерений признака Z в различные моменты времени $\{t_i\}_{i=1}^{r}$ при существенно различных внешних условиях $\{V_j(t_i)\}_{j=1}^{p}$ в эти моменты времени:

$$Z(t_i) = W[\{U_k(S)\}_{k=1}^{r};\{V_j(t_i)\}_{j=1}^{p}]\,. \tag{23}$$

Выражение (23) будем рассматривать как систему r уравнений относительно r неизвестных $\{U_k(S)\}_{k=1}^{r}$. Пусть эта система имеет единственное решение, т.е. существует обратный оператор W^{-1} такой, что:

$$U_k(S) = W^{-1}[\{Z_i\}_{i=1}^{r};\{V_j(t_i)\}_{j=1,i=1}^{p}]\,;\quad Z_i = Z(t_i)\,. \tag{24}$$

Подставим формулу (24) в выражение (22), где $Z = Z(t)$ – измерение признака в момент времени $t \neq t_i$, не совпадающий ни с одним моментом времени $\{t_i\}_{i=1}^{r}$. Обычно $\overset{r}{\underset{i=1}{\forall}}(t > t_i)$ на практике, где t – разведочное время, t_i – предварительные учебные моменты времени:

$$Z(t) = B[\{Z_i\}_{i=1}^{r};\{V_j(t_i)\}_{j=1,i=1}^{p,r}] \tag{25}$$

Особо отметим, что оператор B в равенстве (5) не зависит от местоположения S, т.е. является <u>пространственно инвариантным</u>, а наблюдение $Z = Z(t)$ в любой момент времени t полностью определяется наблюдениями $\{Z_i\}_{i=1}^{r}$ и внешними условиями $\{V_j(t_i)\}_{j=1,i=1}^{p,r}$ в эти же моменты времени $\{t_i\}_{i=1}^{r}$, t, и не зависит от местоположения S этого признака на изображении (пространственная инвариантность оператора B). Другими словами, всё изображение признака $Z(t)$ полностью определяется r изображениями $\{Z(t_i)\}_{i=1}^{r}$:

$$Z(t) = H(Z_1, Z_2, ..Z_r)\,, \tag{26}$$

где преобразование H пространственно инвариантно.

Аналитические и эмпирические способы определения оператора *H*

Если найдено преобразование *H* (26) хотя бы для одного или нескольких пикселей, то оно найдено для всего изображения. В ряде важных практических задач функциональный вид оператора *H* известен с точностью до параметров, которые нужно оценить по наблюдениям $Z(t), Z_1, Z_2, ..Z_r$. Например, при проведении инфракрасной тепловой съёмки [12, 23] оператор H является приближённо линейным преобразованием:

$$Z_t \approx \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i Z_i \tag{27}$$

Эта формула следует из ассимптотики решения одномерного уравнения теплопроводности, как смешанной задачи Коши с двумя граничными и одним начальным условием [23, 25]. Чтобы найти коэффициенты $\{\alpha_i)\}_{i=0}^{r}$, нужно на всех $r+1$ изображениях найти пространственно соответствующие $r+1$ пикселей Z_i^l, Z и решить систему $r+1$ линейных уравнений с $r+1$ неизвестными $\{\alpha_i)\}_{i=0}^{r}$:

$$Z_t^l \approx \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i Z_i^l\ ;\ l = 1,2,\ldots,r+1 \tag{28}$$

относительно этих неизвестных.

Пиксели с признаками Z_t^l, где $i = 1,2,\ldots,r$; $l = 1,2,\ldots,r+1$, взятые для решения системы (8) , назовём индикаторами прогноза. Если индикаторов прогноза достаточно много, то модель для оператора *H* может быть значительно усложнена. Например, в работе [11] используется квадратичная модель. Если же в качестве индикаторов прогноза выбираются почти все пиксели изображения (их число $10^5 \div 10^6$), то полиномиальная модель для оператора *H* может быть довольно высокого порядка. Поиск такой модели (одно из новшеств предлагаемого метода) будет вестись методом минимизации невязок на графе моделей [7]. Индикаторы прогноза могут быть не только естественными, но и искусственными. При найденном виде модели для пространственно инвариантного оператора H признак $Z = Z(t)$ пересчитывается у всех пикселей изображения. Точно по тому же способу пересчитываются все остальные признаки, преобразованные по всем пикселям изображения. Соответствующие времени t

распознавания, признаки для объектов ОВ либо ВОВ могут использоваться для обучения, т.е. для определения ЗРВ всех известных классов, а преобразованные признаки вновь предъявляемых на классификацию объектов поступают в алгоритм распознавания.

Способ РИК, применённый к объектам, признаки которых прогнозировались с помощью оператора H (6) , назовём *динамической моделью распознавания* (ДМР).

Перспективы развития и применения ДМР

А) Другой вариант разработки и применения ДМР состоит в решении сопряжённой задачи – в построении инвариантного во времени оператора G , связывающего одноимённые признаки различных объектов:

$$Z_S = G(Z_{S_1}, Z_{S_2}, \dots, Z_{S_p}) . \tag{29}$$

Следовательно, временной ряд любого пикселя изображения однозначно определяется временными рядами опорных пикселей, взятых в количестве p штук, т.е. по числу независимых внешних факторов $V = V_k(t)$, $k = 1,2,\dots,p$.

Б) Построенный пространственно инвариантный оператор H (26) находит и далее найдёт многочисленные применения в обнаружении объектов, появившихся на изображении в период времени между обучением и распознаванием [11, 12, 24]. Такие «вторгшиеся» на изображение объекты будут аномалиями на разности двух изображений, одно из которых наблюдается, а другое построено пространственно инвариантным оператором:

$$\Delta Z_t = Z_t - H(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_p}) . \tag{30}$$

Эти аномалии могут иметь причинами естественные явления и искусственные воздействия: вулканическую активность, стихийные бедствия, метеофакторы, пожары, вырубки лесов, подземные бункеры, вкопанные и замаскированные опасные предметы, спрятавшихся злоумышленников, несанкционировано возникшие скопления и стоки бытовых и промышленных отходов, постройки и транспортные средства.

ВЫВОДЫ

Для создания оптимального и универсального статистического метода распознавания и классификации на смесевых моделях вероятностных распределений характеристик объектов при дешифрировании дистанционных наблюдений должны быть решены такие задачи:

- построение отличительных характеристик объектов для сжатия исходных данных многоканальных наблюдений;
- восстановление закона распределения вероятности характеристик по наблюдению обучающей выборки, точнее, по наблюдению объектов вероятностной обучающей выборки;
- оценка точности восстановления закона распределения вероятности;
- расчет вероятности Байеса и вычисление ее среднеквадратичной ошибки на всех объектах вероятностной обучающей выборки;
- формулировка и расчет критерия качества классификации вероятностной обучающей выборки;
- оптимизация критерия качества классификации по двум факторам: набору характеристик и правилу классификации;
- нахождение закона распределения вероятности с наименьшим числом неизвестных параметров во всех заданных классах;
- использование динамической модели распознавания для совмещения во времени этапов обучения и распознавания, а также при обнаружении объектов, «вторгшихся» в распознаваемое изображение;
- разработка алгоритма и программного комплекса для построения имитационных примеров, включая максимально удобный для массового пользователя сервис: графику, картографирование и визуальный анализ в многомерных пространствах R^3 и R^m признаков-характеристик;
- создание программного комплекса, реализующего работу оптимального статистического метода распознавания и классификации на дистанционных наблюдениях мультиспектральных съёмок в широком диапазоне электромагнитных волн, в том числе, в спектральном диапазоне радиозондирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anil K. Jain, Robert P. W. Duin, Jianchang Mao Statistical Pattern Recognition: A Review // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. - 2000. - Vol. 22, № 1, January. -P. 4-37.
2. Журавлёв Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. – Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: Фазис, 2006. 159 с.

3. Колтунов И. А., Кондратьева Л. М., Монастырёв А. П. Статистическая классификация наблюдений с полимодальными распределениями // Статистические проблемы управления. Вильнюс. - 1987. - №78. - С. 83-121.
4. G. J. McLachlan and T. Krishnan, The EM – Algorithm and Extensions. New York: Wiley. 1997.
5. Чабдаров Ш. М., Надеев А. Ф., Сафонов В. Л. и др. Новые классы полигауссовых моделей в статистической теории приёма сигналов современных радиоэлектронных систем. Прикладная радиоэлектроника. – Харьков, 2002 – т.1. - № 2, - С. 171-180.
6. Малая Л. Т., Яблучанский Н. И., Рудинский О. О., Колтунов И. А., Кондратьева Л. М., Монастырёв А. П., Чаркина Л. Я. Возможности использования комплексов программ распознавания образов РОСА для обработки медицинской информации. (Препринт АН УССР, Физ. техн. ин-т низких температур. № 12-87). – Харьков. 1987. – С. 19.
7. Колтунов И. А. Применение смесевых моделей вероятностных распределений для обработки изображений и распознавания образов. – Изд-во БелГУ, Белгород, 2004. – с. 122.
8. Koltunov, A. and Ben-Dor, E. Mixture density separation as a tool for high-quality interpretation of multi-source remote sensing data and related issues. International Journal of Remote Sensing, 2004. – V. 25, PP. 3275-3299.
9. Koltunov Y., et al. Detection and recognition of objects by multispectral sensing. US Patent, 6837617, January, 2005. – 5 c.
10. Koltunov, A. Crouvi, O. and Ben-Dor, E. Geomorphologic mapping from hyperspectral data, using Gaussian mixtures and lower confidence bounds. International Journal of Remote Sensing, 2006. – V. 27 (20), PP. 4545-4566.
11. Koltunov A., Ustin S. L. Early fire detection using non-linear multitemporal prediction of thermae imagery. Remote Sensing of Environment, 110, 2007. – PP. 18-28.
12. Koltunov A., Ben-Dor E., Ustin S. L.. Image construction using multitemporal observations and Dynamic Detection Models. International Journal of Remote Sensing, V. 30, №1, January 2009. – PP.57-83.
13. Колтунов И. А., Боровик А. И., Деркач С. В. Оптимальный метод распознавания и классификации для обработки данных дистанционного зондирования. Третья Международная конференция «Космическая съёмка – на пике высоких технологий», Москва, апрель, 2009. С. 579-584
14. Боровик А. И., Деркач С. В., Колтунов И. А.. Построение субоптимального метода распознавания и классификации на смесевых моделях вероятностных распределений для обработки дистанционных данных. Вестник Харьковского национального университета № 926, 2010. – С. 60-74.
15. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М. : Б. и., 1962. – 336 с.
16. Рао К. Р. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука,1968 – 548 с.
17. Крамер Г. Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. – 648 с.
18. Колтунов И. А., Олейников Г. М., Онищенко С. Л. Сходимость ЕМ-алгоритма на смесевой модели распределения признаков для вероятностной обучающей выборки классифицируемых объектов. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях». Харьков, 17-22 апреля 2011, С. 179-180.
19. IEEE Transactions on Pattern- Analysis and Machine Intelligence (2011), v. 33, Issue 7, p. 2386.
20. Pattern Recognition, The Journal of the Pattern Recognition Society (2011), v. 44, Issue 9, p. 3126.
21. Jiucang Hao Te-Won Lee Sejnowski, T. J. (2010) Speech Enhancement Using Gaussian Scale Mixture Models, Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on, v. 18, Issue 6, p. 1127.
22. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания, М., 1979. – 528 с.
23. Koltunov, J., Koltunov, A. Dynamic Detection Model and its application for perimeter security, intruder detection, and automated target. In: Infrared Technology and Applications XXIX, Proc. SPIE, 2003.– V. 5074, PP. 777-787.
24. Koltunov A., Ustin S. L., Asner G. P., Fung I.. Selective logging changes forest phenology in the Brazilian Amazon: Evidence from MODIS image time series analysis. Remote Sensing of Environment 113, 2009. – PP. 2431-2440.
25. Колтунов, И. А., Плетнёв, А. М., Лялько, В. И., Вульфсон, Л. Д. Выявление зон тепловых аномалий / Аэрокосмические методы в геоэкологии / Под ред. Лялько В. И. – Киев: Наукова Думка, 1992. – С. 95 – 103.