

УДК 537.87

## ЭНЕРГИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ, ИЗЛУЧЕННОГО ДИПОЛЕМ ГЕРЦА

Я. С. Вольвач<sup>1</sup>, А.Н. Думин<sup>1</sup>, О.А. Думина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

<sup>2</sup>Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, 61050, г. Харьков, пл. Фейербаха, 7  
e-mail:yvol@ukr.net

Поступила в редакцию 1 ноября 2010 г.

Во временной области методом вектора Герца получены все компоненты электромагнитного поля, излученного диполем Герца, возбуждаемым током с произвольной зависимостью от времени. Исследуются процессы преобразования энергии квазистатических составляющих поля в электромагнитную волну. Рассматривается задача излучения диполя Герца, у которого значение дипольного момента быстро уменьшается от некоторого постоянного значения до нуля. Обсуждаются проблемы в описании процесса формирования свободного электромагнитного поля из квазистатических составляющих поля в ближней зоне диполя.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** диполь Герца, временная область, нестационарные поля, излучение, каузальная поверхность

У часовому просторі методом вектора Герца отримуються всі компоненти електромагнітного поля, випроміненого диполем Герца, що збуджується струмом із довільною залежністю від часу. Досліджуються процеси перетворення енергії квазістатичних складових поля у електромагнітну хвилю. Розглядається задача випромінювання диполя Герца, у якого значення дипольного моменту швидко зменшується від деякого постійного значення до нуля. Обговорюються проблеми опису процесу формування вільного електромагнітного поля з квазістатичних складових поля у ближній зоні диполя.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** диполь Герца, часовий простір, нестационарні поля, випромінювання, каузальна поверхня

All components of electromagnetic field radiated from Herz dipole excited by current with arbitrary time dependence are obtained in time domain by means of vector Herz technique. The processes of transformation of quasi static components of field into electromagnetic wave are investigated. The problem of radiation of Herz dipole with quickly decreasing dipole moment from some constant value to zero is considered. The problems of describing the process of the forming of free electromagnetic field from quasi static field components in near zone of dipole are discussed.

**KEY WORDS:** Herz dipole, time domain, transient fields, radiation, causal surface

Несмотря на то, что задача нахождения поля, излучаемого элементарным излучателем, возбуждаемым заданным током, является классической, некоторые сопутствующие аспекты данной задачи до сих пор представляют интерес, несмотря на ее полуторастолетний возраст. Например, очень сложно в отечественной учебной литературе найти вывод выражений для поля диполя Герца для случая его возбуждения током произвольной временной зависимости. Даже в монографии [1], специально посвященной сверхширокополосным антеннам, описываются и анализируются выражения для поля диполя Герца в частотной области. К тому же, представленный в [1] вывод выражений для полей настолько сжат, что делает невозможным понимание основных этапов алгоритма вывода, при этом, что особенно важно для учебных целей, ускользают основные допущения, используемые в процессе получения конечного результата. Примененный в [2] подход, основанный на применении обратного преобразования Фурье к выражениям для поля диполя Герца, полученным методом комплексных амплитуд, не только не рационален, но и приводит к необходимости необоснованного введения дополнительных ограничений на функцию зависимости тока от времени. Это подтверждает необходимость дополнительного рассмотрения данного вопроса. В [3] утверждается, что в работе [4] получены выражения для поля диполя Герца во временной области, однако, к сожалению, данный учебник труднодоступен.

Данная статья посвящена выводу выражений для поля излучения диполя Герца на основе подхода, предложенного в [5] для произвольной временной зависимости возбуждающего тока, и анализу распределения электромагнитной энергии в его окрестности и ее преобразований.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

По проводнику с поперечным сечением  $S$  в направлении оси  $OZ$  протекает ток  $I(t)$  с произвольной зависимостью от времени. Рассмотрим поле, излучаемое небольшим отрезком такого проводника  $l$ , причем  $l \ll c\tau$ , где  $\tau$  – минимальное время, за которое ток  $I(t)$  заметно меняется,  $c$  – скорость света. При выполнении данного условия распределение тока по всей длине  $l$  будет равномерным. Данное условие всегда будет выполняться, если длина  $l$  будет выбрана бесконечно малой.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Ток через отрезок проводника связан с изменением заряда как  $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$ . Тогда полный дипольный момент данного отрезка проводника будет равен

$$\vec{P}_\Sigma = Q\vec{l}$$

где вектор  $\vec{l}$  направлен вдоль оси  $OZ$ . Дипольный момент на единицу объема равен

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_\Sigma}{V} = \frac{Q\vec{l}}{Sl}. \quad (1)$$

Расчет излучаемого поля будет проводиться методом векторного потенциала, используя известное решение

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'$$

неоднородного уравнения относительно векторного потенциала

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (2)$$

дополненного нулевыми начальными и граничными условиями, где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $\vec{r}$  — координата точки наблюдения,  $\vec{r}'$  — координата точки источника.

При условии равномерного распределения тока внутри проводника и с использованием (1), плотность возбуждающего тока определяется выражением

$$\vec{j} = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Отсюда следует

$$P = \int_{-\infty}^t j dt.$$

Для удобства заменим векторный потенциал  $\vec{A}$  на потенциал Герца  $\vec{\Pi}$  [6], используя связь

$$\vec{\Pi} = c^2 \int_{-\infty}^t \vec{A} dt,$$

которая при применении калибровки Лоренца дает

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}; \quad \varphi = -\text{div} \vec{\Pi}.$$

Действуя на уравнение (2) оператором  $c^2 \int dt$ , получим уравнение для потенциала Герца

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}$$

и его частное решение

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (3)$$

причем связь напряженностей полей с потенциалом Герца имеет вид

$$\vec{E} = \text{grad div} \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}; \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \text{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}. \quad (4)$$

Для бесконечно малого диполя интеграл (3) упрощается в силу того, что мы можем пренебречь его размерами по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, т.е. заменить  $R$  на  $r$ , и распределение плотности тока по сечению проводника можно считать равномерным. После интегрирования из (3) получим

$$\vec{P} = \frac{Sl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (5)$$

что после подстановки в (4) дает

$$\vec{E} = \frac{Sl}{4\pi\epsilon_0} \text{graddiv} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right); \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 Sl}{4\pi} \text{rot} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right). \quad (6)$$

Использование известных представлений для векторных операций в (6) в сферической системе координат совместно с (1) приводит к следующим выражением для полей, излученных электрическим диполем Герца:

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} Q \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr^2} \dot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2 r} \ddot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}; \\ E_r &= \frac{l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} Q \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr^2} \dot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}; \\ H_\phi &= \frac{lc \sin \theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{cr^2} \dot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2 r} \ddot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, что первые слагаемые в выражениях для электрических компонент поля есть кулоновское поле диполя, первое слагаемое в выражении для магнитной компоненты есть магнитное поле, порожденное постоянным электрическим током (закон Био-Савара-Лапласа). Из выражений (7) видно, что, как и следовало ожидать, продольная компонента поля убывает не медленнее, чем обратно пропорционально квадрату расстояния до точки наблюдения. Временная форма излученного поля в дальней зоне есть вторая производная по времени от полного заряда или первая производная от тока. Также интересно заметить, что амплитуда магнитного поля пропорциональна амплитуде поперечной электрической компоненты без первого кулоновского слагаемого, причем коэффициент пропорциональности есть характеристический импеданс свободного пространства  $-\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ . Обычно о такой связи поперечных компонент электрического и магнитного поля упоминают лишь в дальней зоне, когда учитываются только последние слагаемые, убывающие обратно пропорционально расстоянию.

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВОКРУГ ДИПОЛЯ

Известно, что закон сохранения энергии электромагнитного поля будет выполняться только при учете всех компонент поля и всех слагаемых в выражениях (7). Рассмотрение только слагаемых, наименее быстро убывающих с расстоянием, приводит к тому, что нарушается и закон сохранения энергии, и не удовлетворяются дивергентные уравнения Максвелла [3]. Из выражений (7) следует, что амплитуда нормальной компоненты плотности потока мощности на сфере радиуса  $r$ , в центре которой находится диполь, состоит из шести слагаемых с пятью разными видами временной зависимости, как это видно при последовательном перемножении каждого слагаемого в выражениях для поля (7):

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H};$$

$P_z = \frac{cl^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0} \times$	$H_\varphi$		
	$\times$	$\frac{1}{cr^2} \dot{Q}$	$\frac{1}{c^2 r} \ddot{Q}$
$E_\theta$	$\frac{1}{r^3} Q$	$\left( \frac{1}{cr^5} Q \dot{Q} \right.$	$\left. + \frac{1}{c^2 r^4} Q \ddot{Q} \right)$
	$\frac{1}{cr^2} \dot{Q}$	$+ \frac{1}{c^2 r^4} \dot{Q} \dot{Q}$	$+ \frac{1}{c^3 r^3} \dot{Q} \ddot{Q}$
	$\frac{1}{c^2 r} \ddot{Q}$	$+ \frac{1}{c^3 r^3} \ddot{Q} \ddot{Q}$	$+ \frac{1}{c^4 r^2} \ddot{Q} \ddot{Q}$

(8)

Нижнее правое слагаемое, подчеркнутое волнистой линией, обозначает плотность потока энергии волны в дальней зоне, это самое медленно убывающее слагаемое, дающее вклад в полную излученную энергию. Суммарная энергия данной составляющей не убывает с увеличением радиуса сферы, а остается постоянной. Вклад же остальных слагаемых убывает с увеличением радиуса сферы. Используя формулу интегрирования по частям, легко показать, что подчеркнутые двойной линией слагаемые дают нулевой суммарный вклад в поток энергии, если изменение заряда происходит на конечном временном промежутке. Подчеркнутые прерывистой линией слагаемые также могут давать нулевой вклад в поток энергии, если ток через диполь есть функция, симметричная относительно оси или относительно начала координат. Уменьшение суммарного потока энергии с расстоянием объясняется тем, что благодаря этому в пространстве, окружающем диполь, сосредотачивается энергия электромагнитного поля, если через диполь протекает ток. При прекращении протекания тока через диполь энергия, сосредоточенная в окружающем пространстве, преобразуется в излученную, как показано в [3] путем построения и анализа линий с нулевым потоком энергии вокруг диполя. Однако удостовериться в правильности данного утверждения математически из (7) весьма сложно, ведь, как хорошо видно, энергия электромагнитной волны в дальней зоне, представленная слагаемым, подчеркнутым волнистой линией, не зависит от расстояния, следовательно, она как бы совершенно не связана с энергией в пространстве, а рождается внутри диполя. Данное противоречие можно объяснить тем, что в процессе вывода выражений для поля диполя (7), получая из (3) равенство (5), мы посчитали размеры диполя  $l$  намного меньшими расстояния от центра диполя до точки наблюдения  $r$ . Таким образом, выражения для полей (7) перестают быть верными при достаточно близких расстояниях наблюдения. Поэтому, используя (7), при выключении тока можно увидеть как энергия, представленная всеми слагаемыми в (8) за исключением последнего, направится в центр диполя. Проиллюстрируем этот процесс на простой задаче, когда заряды на концах диполя в нулевой момент времени начали линейно уменьшаться до нулевого значения.

Пусть временная зависимость заряда имеет вид, представленный на рис. 1. Тогда аналитически заряд и его производные по времени могут быть представлены как

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0, & t < 0, \\ Q_0 - \frac{Q_0}{\tau_f} t, & 0 \leq t \leq \tau_f, \\ 0, & t > \tau_f, \end{cases} \quad \dot{Q}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{Q_0}{\tau_f}, & 0 \leq t \leq \tau_f, \\ 0, & t > \tau_f, \end{cases} \quad \ddot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{\tau_f} (\delta(t) - \delta(t - \tau_f)). \quad (9)$$

Рассмотрим энергию поля в пространстве вокруг диполя, ограниченном двумя сферами с радиусами  $R_0$  и  $\xi R_0$ , где  $\xi > 1$ . Используя (7) легко показать, что до момента  $t = 0$  данное пространство содержало

энергию  $W_E = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \left( \frac{\xi^3 - 1}{\xi^3} \right)$  электрического поля, представленного компонентами, убывающими с расстоянием обратно пропорционально кубу расстояния до точки наблюдения. А расчет потока энергии, проведенный с использованием первых пяти слагаемых из (8), показывает, что через сферу радиуса  $\xi R_0$  в рассматриваемый объем за все время переходного процесса добавляется энергия величины  $W_{out} = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \frac{1}{\xi^3}$ , а через сферу радиуса  $R_0$  из данного объема выходит энергия величины  $W_{in} = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3}$ , таким образом в итоге из объема в направлении к центру диполя выйдет энергия электромагнитного поля  $W_\Sigma = \frac{l^2 Q_0^2}{12\pi\epsilon_0 R_0^3} \left( \frac{\xi^3 - 1}{\xi^3} \right)$ .

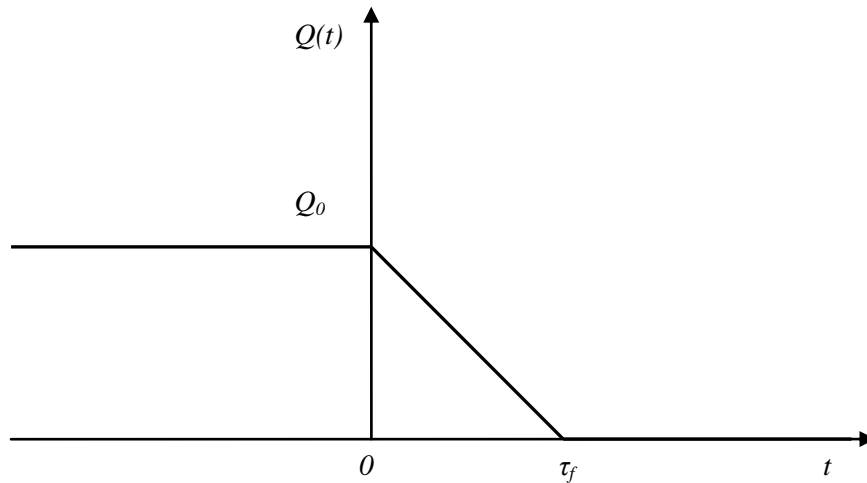


Рис. 1. Временная зависимость заряда диполя при линейном изменении заряда

Описанный выше пример обладает тем недостатком, что, как следует из (9), при таком возбуждении диполь должен излучить бесконечную энергию. Чтобы избежать подобных сложностей, необходимо в качестве временной зависимости заряда диполя взять плавную функцию, подобно предложенным в [3]. Например, пусть  $Q(t) = Q_0 (1 - \text{th}(t/\tau))/2$ . Тогда нормированная на максимум функция  $Q(t)$  при  $\tau = 1$  нс и ее первая и вторая производные приобретут вид, показанный на рис. 2

Для случая, когда излучатель окружен сферой радиуса 1 м, найдем такую скорость изменения сигнала, определяемую параметром  $\tau$ , при которой сфера с радиусом 1 м становится каузальной [7], т.е. суммарный поток энергии, включающий поток энергии квазистатического поля внутрь и поток излучаемой наружу волны, становится равным нулю. Так как энергия квазистатического поля, проходящая внутрь сферы, не зависит от  $\tau$ , то удобно построить отношение излученной энергии к энергии квазистатических компонент поля за пределами сферы, как изображено на рис. 3. Видно, что сфера выбранного размера является каузальной при  $\tau = 0,8$  нс. Следует также отметить, что, исходя из (8), энергия излученной волны растет с уменьшением  $\tau$  обратно пропорционально четвертой степени  $\tau$ , а энергия квазистатических компонент поля растет обратно пропорционально третьей степени  $r$  и обратно пропорционально  $\tau$ . Проводя при помощи рис. 2 условную оценку временного интервала, на котором возбуждающий ток существенно меняется, можно сделать вывод, что размеры каузальной сферы вокруг электрического диполя Герца приблизительно равны пространственной длительности возбуждающего импульса, и, исходя из указанных выше соотношений, это утверждение остается верным для различных скоростей изменения сигнала, задаваемых параметром  $r$ . В [3] утверждается, что на самом деле никакого равенства потоков энергии через каузальную сферу нет, что имеется лишь преобразование энергии квазистатических компонент поля вне этой сферы в электромагнитную волну. Данное утверждение можно также трактовать в качестве подтверждения существования ограничений на

применимость выражений для поля (7), которые естественным образом следуют из способа получения данных выражений.

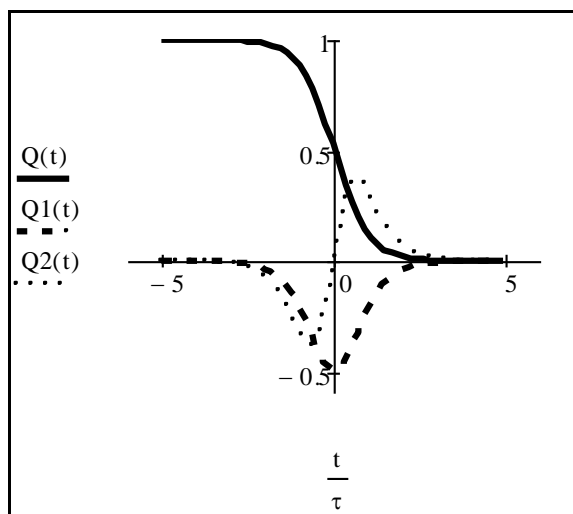


Рис. 2. Временная зависимость заряда диполя при плавном изменении заряда и тока

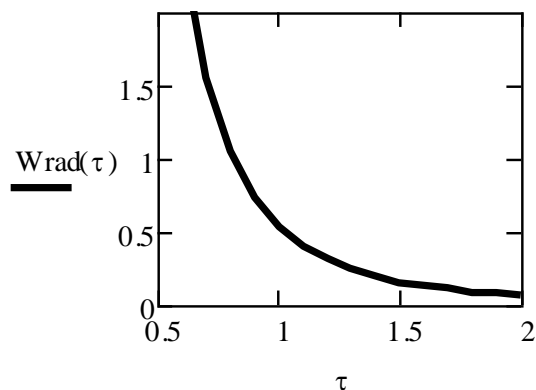


Рис. 3. Отношение излученной энергии к энергии квазистатических компонент поля за пределами сферы радиуса 1 м

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Накладывая ограничение на малость размера диполя по сравнению с пространственным изменением возбуждающего тока для обеспечения его равномерности распределения по длине диполя, а также по сравнению с расстоянием до точки наблюдения поля, получены все компоненты излученного электромагнитного поля во временной области для произвольной временной формы тока. На примере уменьшения дипольного момента от некоторого постоянного значения до нуля исследованы процессы преобразования энергии квазистатических компонент поля в электромагнитную волну. Путем рассмотрения вклада различных слагаемых в суммарный поток энергии электромагнитного поля на произвольном расстоянии от центра диполя для различных временных форм тока показано, что в силу ограничений, использованных при выводе выражений (7), из энергетических соотношений невозможно в деталях проследить процесс формирования электромагнитной волны из квазистатических компонент поля, концентрирующихся вокруг диполя. Анализ данных процессов необходим для повышения эффективности процесса излучения, поиска оптимальных методов накопления энергии квазистатических компонент и преобразования их в электромагнитную волну [8], и связан с такой важной характеристикой антенн как широкополосность [7].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allen B., Dohler M., Okon E.E., Matik W.K., Brown A.K., Edwards D.J. Ultra-wideband Antennas and Propagation for Communications, Radar and Imaging. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 475 p.
2. Naydenko V., Piltyay S. Evolution of radiopulses radiated by Hertz's dipole in vacuum // Proc. XII International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET-2008). – Odesa (Ukraine). – 2008. – P.294-297.
3. Schantz H.G. Electromagnetic Energy Around Hertzian Dipoles // IEEE Antenna & Prop. Magazine. – 2001. – Vol.43, №2. – P.50-62.
4. Smith G. S. An introduction to classical electromagnetic radiation. – New York: Cambridge University Press, 1997. – 458 p.
5. Крымский В.В. Теоретические и экспериментальные исследования излучателей несинусоидальных волн: Дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.03 / Челябинский ГТУ. – Челябинск, 1993. – 283 с.
6. Герц Г. Силы электрических колебаний, рассматриваемые с точки зрения теории Максвелла / 50 лет волн Герца -М.: Академия Наук СССР, 1938. С. 92 – 119.
7. Schantz H.G. The art and science of ultrawideband antennas. - London: Artech House, 2005. – 153 p.
8. Pochanin G.P. Pochanina I.Ye. Proper mode of excitation for large current radiators // 5th International Conference on "Ultra Wideband and Ultra Short Impulse Signals" September 6-10, 2010, Sevastopol, Ukraine, P.218-220.