УДК 517.9:535.4

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ СФЕРЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ПАКЕТА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ДИПОЛЕЙ, ЭКРАНИРОВАННЫХ СФЕРОЙ

В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
e-mail: rezunenko@univer.kharkov.ua
Поступила в редакцию 12 ноября 2010

Получено строгое решение задачи электростатики. Анализируется электростатический потенциал сферы с круговым отверстием (сегмента), имеющей сингулярное ребро, и замкнутой сферы, полностью экранирующей сегмент, в присутствии пакета горизонтальных диполей. Использованы метод интегральных преобразований, метод регуляризации, метод выделения и обращения главной части интегральных и сумматорных уравнений. Получена эффективно разрешимая бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве l_2. Рассмотрены некоторые варианты задачи и обобщение задачи.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электростатика, сфера с круговым отверстием, горизонтальные диполи, интегральные и алгебраические уравнения второго рода.

Одержано строгий розв’язок задачі електростатики. Досліджується електростатичний потенціал сфери з круговим отвором (сегменту), яка має сингулярне ребро, та замкненої сфери, котра повністю екранує сегмент. Потенціал вивчається у присутності пакета горизонтальних диполів. Використані метод інтегральних перетворень, метод регуляризації, метод відокремлювання та обертання головної частини інтегральних та суматорних рівнянь Одержано ефективно розв’язну нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним матричним оператором у гільбертовому просторі l_2. Розглянуто деякі варіанти задачі та узагальнення задачі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: електростатика, сфера з круговим отвором, горизонтальні диполі, інтегральні та алгебраїчні рівняння другого роду.

The rigorous solution to the problem of electrostatics is obtained. We analyze the electrostatic potential of a sphere with a circular aperture (segment), which has a singular edge. Segment is shielded by a closed sphere. The potential is studied in the presence of a package of horizontal dipoles. The method of integral transforms, the method of regularization, the method of selection and the inverse of the principal part of integral and summation equations are used. As a result, a infinite system of linear algebraic equations of the second kind is obtained. The system has a compact operator in Hilbert space l_2. The system is effectively solvable analytically and numerically. Some variants and generalization of the problem are discussed.
KEY WORDS: electrostatic, sphere with a circular aperture, the horizontal dipoles, integral and algebraic equations the second kind.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальными являются вопросы разработки и усовершенствования методов решения классических задач радиофизики, электродинамики и микроэлектроники. Цель таких разработок – решение новых задач, получение новых и уточнение известных физических данных для эффективного прикладного моделирования. В этом направлении важны исследования задач на сферических поверхностях [1]-[5]. Замкнутая сфера и сфера с круговым отверстием имеют широкое применение, они могут рассматриваться прототипом многих узлов и устройств, в том числе различных мощных накопителей электростатической энергии. Для решения задач на сферических поверхностях, разработаны сравнительно эффективные методы решения прямых и обратных задач. К таким методам относится, в частности, метод полуобращения матричного оператора задачи [3-8]. Для задач микроэлектроники и, в частности, электростатики метод полуобращения, как известно, применяется не достаточно активно. В данной работе развивается и применяется метод полуобращения интегрального и матричного операторов задачи электростатики на сфере с круговым отверстием (на сегменте) и на замкнутой сфере, экранирующей (охватывающей) сегмент, в присутствии пакета горизонтальных диполей. Диполи размещены на оси симметрии сегмента и сферы. В результате получена и исследована система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным матричным оператором в гильбертовом пространстве числовых последовательностей l_2. Рассмотрены варианты постановки задачи и некоторые обобщения задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть начало декартовой и сферической систем координат размещены в центре сферы с круговым отверстием (сегмента) и в центре замкнутой экранирующей (внешней) сферы. Полагаем a_0 и a_1 - радиусы сферического сегмента и внешней сферы соответственно, $(0 \le a_0 < a_1)$. На сферическом сегменте пусть полярный угол θ изменяется от θ_0 до π, при этом $\theta_0 \in [0, \pi]$. Структура симметрична относительно поворота вокруг оси OZ на любой угол φ. Электростатическое полное поле $\boldsymbol{E}$ должно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла, материальным уравнениям и граничным условиям:

$$rot\boldsymbol{E} = 0,\ div\boldsymbol{D} = \rho,\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} = 0,\ \left[\boldsymbol{n},\left(\boldsymbol{E2} - \boldsymbol{E1}\right)\right] = 0. \tag{1}$$

В уравнениях (1) $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B})$ - векторы электрической (магнитной) индукции, ρ - плотность поверхностных зарядов, $\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль к поверхностям, ε - диэлектрическая проницаемость среды, $\boldsymbol{E2}, \boldsymbol{E1}$ - полные поля на границе областей $0 \le r < a_0$, $a_0 < r < a_1$, $r > a_1$. Из (1) следует, что поле $\boldsymbol{E} = -grad\left(U\right)$ с точностью до калибровочной константы, где U - электростатический потенциал. По условию на оси OZ внутри и вне сферы с круговым отверстием, а также вне внешней сферы размещены горизонтальные диполи (пакет диполей). Задача имеет несколько параметров, рассмотрим их подробно.

Потенциалы сферических поверхностей задаём такими: 1) $V_0 / \left(4\pi\varepsilon\right)$ - потенциал сферического сегмента; 2) $V_0^{(0)} / \left(4\pi\varepsilon\right)$ потенциал внешней сферы. Потенциалы пакета диполей представим тремя группами. В каждой группе задано различное конечное число $N1,\ N2,\ N3$ диполей так, что первая группа (из $N1$ диполей) размещена внутри сферы с отверстием, вторая группа (из $N2$ диполей) размещена между сегментом и внешней сферой, а третья группа (из $N3$ диполей) – вне структуры из сфер. Пусть $V_m^{(k)}$ - потенциал и $b_m^{(k)}$ - расстояние m - го диполя k - ой группы пакета из Nk диполей, размещенных на оси OZ, до начала системы координат, ($k = 1, 2, 3$):

$$\left(0 \le b_m^{(1)} < a_0\right), \quad \left(a_0 < b_m^{(2)} < a_1\right), \quad \left(b_m^{(3)} > a_0\right). \tag{2}$$

Полные электростатические потенциалы U (суперпозиция заданных и вторичных) должны всюду вне сферических поверхностей и вне точек размещения диполей удовлетворять, согласно (1), уравнению Лапласа в сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2 U\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{3}$$

На поверхности сферического сегмента полные потенциалы должны быть непрерывными (1), а также должны иметь непрерывные частные производные на дополнении сферического сегмента (при $\left(r = a_0,\ 0 \le \theta < \theta_0\right)$ до замкнутого сегмента (при $\left(r = a_0,\ 0 \le \theta < \pi\right)$). Полные потенциалы должны удовлетворять также условию конечности электростатической энергии в любой ограниченной области пространства, удовлетворять условию ограниченности в начале системы координат, иметь требуемые особенности в точках размещения диполей, а также удовлетворять условию убывания при $r \to \infty$. В такой постановке задача Дирихле для уравнения Лапласа (3) имеет единственное решение [9] и решается впервые.

ПАРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сначала представим потенциалы заданных электростатических диполей в виде рядов Фурье-Лежандра по собственным функциям оператора Лапласа (3) в сферической системе координат. Для m -того диполя k - той группы пакета диполей потенциал таков:

$$V_m^{(k)} = \frac{p_{m,k}}{4\pi\varepsilon}\cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty} F_m^{(k)}(n) P_n^1(\cos\theta)\frac{1}{b_m^{(k)}}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{r}\left(b_m^{(k)}/r\right)^n, & b_m^{(k)} < r \\ \frac{1}{b_m^{(k)}}\left(b_m^{(k)}/r\right)^{-n}, & b_m^{(k)} > r \end{array}\right\}. \quad (3.a)$$

В (3.а) величина $p_{m,k}$ равна абсолютной величине вектора - момента $p_{m,k}$ горизонтального диполя и определяет направление вектора параллельно $(//)$ полуоси $(+OX)$ или параллельно $(//)$ полуоси $(-OX)$:

$$p_{m,k} = abs(\boldsymbol{p}_{m,k}), \ \boldsymbol{p}_{m,k} // (+OX); \qquad p_{m,k} = -abs(\boldsymbol{p}_{m,k}), \ \boldsymbol{p}_{m,k} // (-OX), \quad (4)$$

величина $F_m^{(k)}(n)$ характеризует положение диполя на оси OZ: выше начала системы координат ($z > 0$) или - ниже ($z < 0$):

$$F_m^{(k)}(n) = 1, \ z > 0; \quad F_m^{(k)}(n) = (-1)^n, \ z < 0. \quad (5)$$

В (3.а) разложение в ряд выполнено по $P_n^1(\cos\theta)$ - присоединённым функциям Лежандра первого рода порядка n первой степени аргумента $\cos\theta$. Функции Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$ ортогональны с весом $\sin\theta$ в гильбертовом пространстве $L_2^{(1)}(0,\pi)$, квадрат нормы функций равен: $2n(n+1)/(2n+1)$, $n \ge 1$. Степенные функции r^n, обеспечивают ограниченность потенциалов в окрестности начала системы координат, а функции r^{-n-1} обеспечивают выполнение условия требуемого убывания потенциала при $r \to \infty$.

Для поиска вторичных потенциалов разбиваем пространство R^3 на три области, соответствующие (2). В этих областях вторичные потенциалы представим рядами вида (3.а):

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n^1(\cos\theta), \qquad 0 < r < a_{0,} \quad (6)$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n^1(\cos\theta), \ U_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n^1(\cos\theta), \quad a_0 < a_1, \quad (7)$$

$$U_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-n-1} P_n^1(\cos\theta), \qquad r > a_1 \ . \quad (8)$$

Искомые коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n рядов (6)-(8) должны принадлежать гильбертовым пространствам числовых последовательностей $\tilde{l}^2$ с некоторыми весами, обеспечивающими выполнение условия конечности интеграла электростатической энергии. Сначала построим систему вспомогательных парных функциональных уравнений для отыскания коэффициентов B_n потенциала U_2 - ряда (7). Из граничных условий на сферическом сегменте получаем функциональное уравнение:

$$\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n a_0^{-n-1} + C_n a_0^n + G_{n,2}^1\right] P_n^1(\cos\theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \quad (9)$$

где $G_{n,2}^1$ - ограниченная величина, определяемая ниже, по (10), при замене символа k на 2:

$$G_{n,k}^1 = \sum_{m=1}^{NK} p_{m,k} F_m^{(k)}(n)\frac{1}{a_0 b_m^{(k)}}\left(b_m^{(k)}/a_0\right)^n. \quad (10)$$

В функциональном уравнении (9) необходимо учесть свойства модели электростатических потенциалов горизонтальных диполей (3.а), которые следуют из свойств функций Лежандра: при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi$ функции обращаются в ноль:

$$P_n^1(\cos 0) = P_n^1(\cos\pi) = 0,\; n \ge 1. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что все потенциалы, представимые рядами вида (3.a)-(8), также обращаются в ноль при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi$, кроме точек $z = b_m^{(k)}$ размещения диполей. Для учёта свойств (11) в моделях диполей и вторичных потенциалах необходимо выполнить калибровку всех потенциалов задачи и выбирать потенциалы сферических поверхности такими, чтобы они имели одни и те же свойства, например, поверхности могут быть заземлёнными. Значит, с учётом (11), уравнение (9) приобретает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n a_0^{-n-1} + C_n a_0^n + G_{n,2}^1\right] P_n^1(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \le \pi. \qquad (12)$$

Исключим коэффициенты C_n из уравнения (12). С этой целью используем граничные условия (1) для полных потенциалов и получим связь коэффициентов $A_n,\, B_n,\, C_n$:

$$A_n a_0^n + G_{n,1}^1 = B_n a_0^{-n-1} + C_n a_0^n + G_{n,2}^1, \quad B_n a_1^{-n-1} + C_n a_1^n + H_{n,1} = J_{n,0}. \qquad (13)$$

Здесь, в (13) величина $G_{n,1}^1$ определяется по (10), заменой в $G_{n,k}^1$ (10) символа k на 1,

$$H_{n,1} == \sum_{m=1}^{N2} p_{m,2} F_m^{(2)}(n) \frac{1}{a_1 b_m^{(2)}} \left(b_m^{(2)} / a_1\right)^n, \qquad J_{n,0} = \int_0^{\pi} V_0^{(0)}(\theta) P_n^1(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \qquad (14)$$

Отметим здесь, что если рассматривать внешнюю зкранирующюю сферу заземлённой, то следует брать в (14) потенциал сферы нулевым (с учётом калибровки) и для (14) получаем

$$V_0^{(0)}(\theta) = 0, \quad J_{n,0} = 0. \qquad (14.a)$$

Из системы уравнений (13) получаем

$$A_n = B_n\left(a_0^{-2n-1} - a_1^{-2n-1}\right) + K_{n,1}, \quad C_n = -B_n a_1^{-2n-1} + K_{n,2}. \qquad (15)$$

где

$$K_{n,1} = -H_{n,1} a_1^{-n} + J_{n,0} a_1^{-n}, \qquad K_{n,2} = K_{n,1} + \left(G_{n,2}^1 - G_{n,1}^1\right) a_0^{-n}. \qquad (16)$$

В результате приходим к функциональным уравнениям относительно коэффициентов B_n, $(n \ge 1)$, ряда (7) которые далее удобно преобразовывать в систему алгебраических уравнений второго рода:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{B_n}{a_0^{n+1}}(2n+1) + n\left[G_{n,1}^1 - G_{n,2}^1\right] + a_0 K_{n,1}\right\} P_n^1(\cos\theta) = 0, \quad 0 \le \theta < \theta_0, \qquad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{B_n}{a_0^{n+1}}\left[\frac{a_1^{2n+1} - a_0^{2n+1}}{a_1^{2n+1}}\right] + G_{n,1}^1 - K_{n,2} a_0^n\right\} P_n^1(\cos\theta) = 0, \qquad \theta_0 < \theta \le \pi. \qquad (18)$$

Система уравнений (17)-(18) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве $\tilde{l}_2$. Ядро уравнений содержит сложные сферические функции. Числовые множители при отыскиваемых коэффициентах B_n имеют разную скорость убывания при $n \to \infty$. на частичных интервалах основного отрезка $[0, \pi]$. Функциональные уравнения плохо сшиваются при $\theta = \theta_0$. Несмотря на наличие мощной вычислительной техники прямые вычислительные методы решения этой системы неэффективны, в частности, из-за сложности оценки погрешностей и проверки устойчивости алгоритма. Общего метода решения таких систем пока нет. Вместе с тем, система допускает эффективную регуляризацию [3]-[8] методом полуобращения операторов задачи.

Выполним полуобращение операторов задачи – полуобращение парной системы функциональных уравнений (17)-(18), используя эквивалентные преобразования, и получим систему алгебраических уравнений второго рода.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Сначала в уравнениях (17), (18) применим для присоединенных функций Лежандра интегральные представления типа Мелера – Дирихле. Отметим, что, следуя [10], для получения этого представления

необходимо учесть связь $P_n^1(\cos\theta)$ с производными полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и использовать интегральные представления типа Мелера – Дирихле для полиномов Лежандра. В итоге получим

$$P_n^1(\cos\theta)\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin\theta=\int\limits_0^{\theta}\frac{\sin x\sin\left[(n+0.5)x\right]}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}dx=\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{\sin x\cos\left[(n+0.5)x\right]}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}dx. \qquad (19)$$

Подставим интегральные представления функций Лежандра (19) в оба уравнения (17), (18) и, используя принадлежность рядов в уравнениях пространству $L_2(0,\pi)$, изменим порядки интегрирования и суммирования. Этим приходим к интегральным уравнениям Вольтерра I рода (типа Абеля):

$$\int\limits_0^{\theta}\frac{f(x)dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}=f_1(\theta),\ \theta\in[0,\theta_0);\qquad \int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{g(x)dx}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}=g_1(\theta),\ \theta\in(\theta_0,\pi]. \qquad (20)$$

В уравнениях (20) функция $f_1(\theta)$ обращается в ноль при $\theta=0$, а $g_1(\theta)$ обращается в ноль при $\theta=\pi.$; обе функции принадлежат пространству $L_2(0,\pi)$. Спектр интегральных операторов в (20) имеет единственную предельную точку. Каждое из интегральных уравнений в (20) имеет единственное решение [11]. Решение уравнений в (20) отыскивается с помощью композиции с ядром уравнения [11]. Решение каждого интегрального уравнения является тригонометрическим рядом для функции из $L_2(0,\pi)$. Этим переходим от функциональных уравнений первого рода по функциям Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$ к функциональным уравнениям - к рядам по тригонометрическим функциям $\cos\left[(n+0.5)x\right]$ на $\theta\in(\theta_0,\pi]$ и по $\sin\left[(n+0.5)x\right]$ на $\theta\in[0,\theta_0)$.. Теперь в полученные функциональные уравнения введём параметр малости ε_n и выполним переобозначения требуемых коэффициентов B_n (7):

$$\varepsilon_n=\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{2n+1},\quad B_n^{(1)}=\frac{n(n+1)B_n}{\left(2n+1\right)a_0^{n+1}},\qquad n\geq 1. \qquad (21)$$

Выполним интегрирование функционального уравнения на $[0,\theta_0)$ {рядов по функциям $sin\left[(n+0.5)x\right]$. Возникающая при этом константа интегрирования T_0 такова:

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+1}\left[\frac{L_{n,1}}{2n+1}+L_{n,2}\right]\beta_{n,0}(\theta_0)/\beta_{0,0}^{(0)}(\theta_0)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m^{(1)}\varepsilon_m\beta_{m,0}(\theta_0)/\beta_{0,0}^{(0)}(\theta_0), \qquad (22)$$

где

$$L_{n,1}=n\left[G_{n,1}-G_{n,2}\right]+a_0K_{n,2},\ L_{n,2}=G_{n,1}-a_0K_{n,1},\ n=0,1,2,.... \qquad (23)$$

$$\beta_{n,m}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin[(n-m)\theta_0]}{n-m}+\frac{\sin[(n+m+1)\theta_0]}{n+m+1}\right\} \qquad (24.a)$$

$$\beta_{n,n}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\left\{\theta_0+\frac{\sin[(2n+1)\theta_0]}{n+m+1}\right\},\quad \beta_{0,0}^{(0)}(\theta_0)=2\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\right\}. \qquad (24.b)$$

Отметим, что в (22) для константы T_0 числовые ряды сходятся равномерно для всех углов раскрыва $\theta_0 \in [0,\pi]$ сферического сегмента и для любого конечного набора диполей, для которых расстояния $z = b_m^{(k)}$ до начала системы координат, а также радиус сферического сегмента a_0 и радиус a_1 внешней сферы удовлетворяют заданному условию (2).

Подставим константу интегрирования T_0 (22) в проинтегрированное функциональное уравнение на $[0,\theta_0)$ и этим завершим переход к парным функциональным уравнениям по одним и тем же тригонометрическим функциям $\cos[(n+0.5)x]$ на заданных частях $[0,\theta_0),\ (\theta_0,\pi]$ основного отрезка $[0,\pi]$. При этом парные функциональные уравнения первого рода преобразованы в функциональные уравнения второго рода, в частности, с помощью выделения главной части и введения параметра малости ε_n (21).

Теперь выполним обращение главной части полученных функциональных уравнений методом, близким к методу задачи Римана – Гильберта [3-5], используя при этом полноту и ортогональность базисных функций $\cos[(n+0.5)x]$, $n = 0,1,2,3,...$ в $L_2(0,\pi)$ [12,13]. В итоге получаем искомую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ-11)

$$B_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(1)} \varepsilon_k \left[\delta_{n,k} - \beta_{n,k}^{(1)}(\theta_0)\right] +$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2m+1}\left\{L_{m,2}\left[\delta_{m,n} - \beta_{m,n}^{(1)}(\theta_0)\right] - L_{m,1}\beta_{m,n}^{(1)}(\theta_0)\right\}. \tag{25}$$

В системе (25) коэффициенты $B_n^{(1)}$ и параметр малости ε_k введены в (21) и (7), $\delta_{m,n}$ - символ Кронекера, $L_{m,1}$ и $L_{m,2}$ - введены в (23),

$$\beta_{n,k}^{(1)}(\theta_0) = \left\{1 - \frac{\sin[(n+0.5)\theta_0]}{(n+0.5)\beta_{0,0}^{(0)}(\theta_0)}\right\}\beta_{n,k}(\theta_0). \tag{26}$$

и $\beta_{n,k}(\theta_0)$ введены в (24.а), (24.в). Рассмотрим некоторые свойства БСЛАУ-11 (25), (26). 1). Величины $\beta_{m,n}^{(1)}(\theta_0)$ (26) не имеют особенностей при $\theta \to 0$ и при $\theta \to \pi.$ Действительно, по правилу Лопиталя

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin[(n+0.5)\theta]}{(n+0.5)\beta_{0,0}^{(0)}(\theta)} = 1, \tag{27}$$

а также, согласно (24.а), (24.в),

$$\lim_{\theta\to 0} \beta_{n,k}(\theta) = 0,\ \lim_{\theta\to\pi} \beta_{0,0}^{(0)}(\theta) = 2,$$
$$\lim_{\theta\to\pi} \beta_{n,k}(\theta) = 1, n \neq k;\ \lim_{\theta\to\pi} \beta_{n,n}(\theta) = 1,\quad n,k = 0,1,2,...$$

2). В правой части системы линейных алгебраических уравнений (25) матричный оператор является вполне непрерывным в гильбертовом пространстве числовых последовательностей l_2 [13}. Спектр оператора не содержит единицы. Это следует, в частности, из оценок параметра малости ε_n (21) и величины $\beta_{n,k}(\theta)$ (24.а), (24.в):

$$\varepsilon_n = O(q^{2n+1}),\quad 0 < q = \frac{a_0}{a_1} < 1,\quad n \to \infty,\ 0 \le \left|\beta_{n,m}(\theta_0)\right| \le \frac{2\theta_0}{\pi}. \tag{28}$$

3). Ряд в правом столбце системы (25) сходится равномерно для любых значений $\theta_0 \in [0,\pi]$ и для любых фиксированных значений $a_0,\ b_m^{(k)},\ a_1$, удовлетворяющих условию (2); весь правый столбец системы (25) принадлежит гильбертовому пространству l_2. Система имеет единственное решение. Система разрешима как численно, так и аналитически для любых параметров задачи, согласующихся с (2). Аналитически методом последовательных приближений система (25) разрешима при условии (2) для θ_0 малых $\left(0 \le \theta_0 << 1\right)$. Для решения системы аналитически при θ_0 больших $\left(0 \le \pi - \theta_0 << 1\right)$ необходимо выполнить переход к новым углам, измеряющим величины отверстия в сфере, и выполнить замену θ_0 так: $\theta_1 = \pi - \theta_0$. Затем необходимо выделить главную диагональ системы (25) и перенести её в левую часть системы.

Отметим, что в большинстве задач электростатики на сферических поверхностях, решаемых методом полуобращения операторов задачи, скорость сходимости аналитических и численных методов сравнительно высока и, прежде всего, обусловлена степенным стремлением к нулю параметра малости вида ε_n (21), (28) при $n \to \infty$. Отметим, что полученный в работе алгоритм позволяет строить аналитические и численные решения с большей точностью по сравнению с алгоритмом, разработанным в [7], и применённым в качестве тестового для предельного варианта нашей задачи в случае, когда радиус внешней сферы стремится к бесконечности $a_1 \to \infty$ и рассматривается один горизонтальный диполь, размешённый внутри сферического сегмента.

Теперь найдём полный потенциал в ещё не рассмотренной области вне экранирующей замкнутой сферы, для которой в (2) $r > a_1$. Для задания соответствующих потенциалов из пакета диполей необходимо в $V_m^{(k)}$ (3.а) выбрать $k = 3$ и $m = 1, 2, 3, ...N3$. В этой области для вторичного потенциала U_4 (8) коэффициенты D_n ряда Фурье-Лежандра вычисляются явно [14, 15]:

$$D_n = \sum_{m=1}^{N3} p_{m,k} F_m^{(3)}(n) \frac{1}{(b_m^{(3)})^2} \left(\frac{a_1}{b_m^{(3)}} \right)^n, \; n = 1, 2, 3, ... \tag{29}$$

Естественными тестовыми варианты задачи являются предельные случаи, когда сферический сегмент превращается в замкнутую сферу при $\theta_0 \to 0$ или исчезает при $\theta_0 \to \pi$. Эти варианты задачи решаются явно, аналогично (29), и совпадают с вариантами, получаемыми при рассмотрении системы (25) для $\theta = 0$, а также для $\theta = \pi$. Так, при $\theta_0 \to 0$ коэффициенты A_n, B_n, C_n рядов (6)-(8) для потенциалов U_1, U_2, U_3 таковы:

$$\begin{gathered} A_n = -G_{n,1} a_0^{-n}, \\ B_n = \frac{G_{n,2}^{(1)} a_1^n - H_{n,1} a_0^n}{\det(n)}, \; C_n = \frac{G_{n,2}^{(1)} a_1^{-n} - H_{n,1} a_0^{-n-1}}{\det(n)}, \\ \det(n) = a_1^n a_0^{-n-1} - a_1^{-n-1} a_0^n, \quad n \ge 1, \end{gathered} \tag{29.a}$$

где величины $G_{n,2}^{(1)}$ введены в (10), а $H_{n,1}$ введены в (14). В (29.а) $\det(n)$ не обращается в нуль, так как по условию $a_0 < a_1$.

ВЫВОДЫ

Построена бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным матричным оператором в пространстве l_2. Система имеет эффективное решение для всех параметров задачи, согласующими с априори заданным условием (2). Система построена так, что позволяет также исследовать различные предельные варианты постановки задачи. Например, при рассмотрении вместо сферического сегмента предельной замкнутой сферы, а также в другом варианте при полном исчезновении сегмента. Построенный алгоритм перспективен для дальнейшей регуляризации рассматриваемых задач и для анализа более сложных задач на сферических структурах. Так, один из способов ускорения сходимости и улучшения устойчивости методов решения системы типа (25) выполняется в три этапа: 1) замена переменных $B_n^{(1)}$, связанных с коэффициентами B_n ряда Фурье-Лежандра искомого потенциала U_2 (6), 2) введение новых матричных элементов $\gamma_{n,k}(\theta_0)$ такого вида:

$$B_n^{(1)} = \frac{B_n^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon_n}}, \quad \gamma_{n,k}(\theta_0) = \sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{\varepsilon_k}\left[\delta_{n,k} - \beta_{n,k}^{(1)}(\theta_0)\right],$$

3) умножение каждого элемента (ряда) в правой части системы на множитель $1/\sqrt{\varepsilon_n}$.

Заметим, что отдельным вариантом, имеющим самостоятельный интерес, является вариант следующей усложнённой структуры. Пусть на внешней экранирующей сфере выделено M секций. Пусть секции разделены непроводящими бесконечно тонкими изолирующими перегородками, расположенными в горизонтальных плоскостях.. На каждой j - той секции сферы угол θ изменяется от θ_{j-1} до θ_j :

$$0 = \theta_0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_j \le \ldots \le \theta_M = \pi.$$

Предположим, что каждая секция внешней экранирующей сферы снабжена “переменным по φ (например, вида $\cos\varphi$) потенциалом дипольного приближения (3.а) – (5)”. Такими свойствами могут обладать композитные материалы и метаматериалы [14], [16]. Этот вариант обобщения задачи учтён в работе. Для его реализации необходимо задать обобщённый потенциал $V_0^{(0)} = V_0^{(0)}(\theta,\varphi)$ внешней экранирующей сферы на каждой секции таким, чтобы

$$V_0^{(0)}(\theta,\varphi) = \cos\varphi V_{0,j}^{(0)} / \left(4\pi\varepsilon\right), \quad j = 1,2,3,\ldots M, \tag{30}$$

где полагаем $V_{0,j}^{(0)}$ константами. Затем равенство (30) необходимо учесть при выполнении калибровки всех потенциалов, а также применить при вычислении интеграла $J_{n,0}$ в (14). Отметим при этом, что интеграл $J_{n,0}$ в (14) вычисляется в явном виде.

Отдельным вариантом является случай выбора произвольных направлений (в горизонтальных плоскостях) моментов (3.а), (4) каждого горизонтального диполя. При этом, используя принцип суперпозиции, момент каждого диполя представим проекциями на оси OX и OY. Тогда, в ряде (3.а) для потенциала каждого диполя и в рядах для вторичных потенциалов (6)-(8) необходимо взять вместо множителя $\cos\varphi$ множитель $\cos(\varphi - \varphi_m^{(k)})$. При этом, естественно, сначала требуется решить “ключевую задачу (1),(3.а) “ “со множителем $\cos\varphi$“ во всех первичных и вторичных потенциалах - в рядах (3.а) - (8). Отметим, что при этом, несмотря на усложнение постановки задачи и рассмотрение произвольно ориентированных горизонтальных диполей, вновь получаем эффективный алгоритм, основу которого составляет система (25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф.М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. - М.: - ИЛ, - 1960. - 493 с.
2. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, в.10-11. - С. 1193-1206.
3. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
4. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К . Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.
5. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур // Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8, в.10-11. - С. 4-18.
6. Свищёв Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. // ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т.12. - С. 56-60.
7. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А. Электростатический потенциал горизонтального диполя в присутствии сферического сегмента // Радиотехника. -Изд. ХГУ - 1989. - Вып.91. - С. 131-136.
8. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием // Электромагнитные волны и электронные системы. - 2005. - Т.10, в.8. - С. 3-15.
9.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: - Наука, 1972, -735 с.
10. Бейтмен Г. , Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. - М.: - Наука, - 1974. - 295 с
11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. -М.:-ИЛ, 1960. -299 с. .
12. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения -Киев: -Наукова Думка,- 1977. -362 с.
13. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. -368 с.
14. Shiang-Woei Chyuan, Yunn-Shiuan Liao, Jeng-Tzong Chen. Efficient thechniques for BEM rank-deficiency electrostatic problems.// Journal of Electrosttatics, v. 66, 2008. P. 8-15
15. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. - М.:-ФМЛ, - 1979.-832 с.
16. Sarychev A.K., Shalaev V.M. Electrodynamics of Metamaterials. -World Scientific, -2007.-250p.