

УДК 537.874

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА НЕОДНОРОДНОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

В.В. Кузьменко, О.В. Багацкая, С.Н. Шульга

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

Поступила в редакцию 20 октября 2010 г.

Исследовано рассеяние плоской электромагнитной волны неоднородном включении в безграничной однородной среде. Численное решение задачи рассеяния для H -поляризованной волны проведено с помощью интегро-дифференциальных уравнений по сечению рассеивателя в сочетании с методом моментов. Полученные уравнения описывают распределение рассеянного поля как внутри включения, так и во внешней области. Приведены графики, иллюстрирующие поведение рассеянного поля в ближней зоне.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неоднородное включение, метод интегро-дифференциальных уравнений, метод моментов, рассеяние плоских волн, H -поляризация.

Досліджено розсіяння плоскої електромагнітної хвилі на неоднорідному включенні в безграничному однорідному середовищі. Чисельний розв'язок задачі розсіяння для H -поляризованої хвилі проведено за допомогою інтегро-диференціальних рівнянь за поперечним перерізом розсіювача у поєднанні з методом моментів. Отримані рівняння описують розподіл розсіяного поля як всередині включення, так і у зовнішній області. Наведено графіки, що ілюструють поведінку розсіяного поля в ближній зоні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: неоднорідне включення, метод інтегро-диференціальних рівнянь, метод моментів, розсіяння плоских хвиль, H -поляризація.

Under investigation is the plane electromagnetic wave scattering on inhomogeneous inclusion in unbounded homogeneous medium. The scattering problem numerical solution for H-polarized wave is completed by integro-differential equations on the scattering cross-section and method of moments. The obtained equations characterize the scattered field distribution both inside inclusion, and in external area. Illustrative results for scattered field in near-field region are presented.

KEYWORDS: inhomogeneous inclusion, integro-differential equations method, method of moments, plane wave scattering, H-polarization.

Теоретическое моделирование взаимодействия плоских электромагнитных волн с неоднородными изотропными объектами представляет интерес во многих физико-технических приложениях, таких как неразрушающий контроль и дистанционное зондирование. В работах [1, 2] рассматривалось рассеяние волн на изотропных телах в изотропной среде. Рассеяние гармонических волн на однородном изотропном цилиндре с произвольным поперечным сечением рассматривалось в работе [3]. Для решения задачи рассеяния плоских волн на включении удобно использовать метод интегро-дифференциальных уравнений [4-6]. Для численного решения интегро-дифференциальных уравнений используется метод моментов [7, 8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим наклонное падение плоской H -поляризованной электромагнитной волны на включение в форме бесконечного изотропного цилиндра прямоугольного сечения в безграничной среде (рис. 1). Включение располагается в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Распределение диэлектрической проницаемости в прямоугольном включении характеризуется скалярной величиной ε_p , а магнитная проницаемость $\mu_p = 1$.

В соответствии с геометрией задачи (рис. 1) H - поле падающей волны может быть записано в виде:

$$H_{0x} = \exp[ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)]$$

где φ_0 - угол скольжения падающей волны. Зависимость от времени выберем в виде $e^{-i\omega t}$.

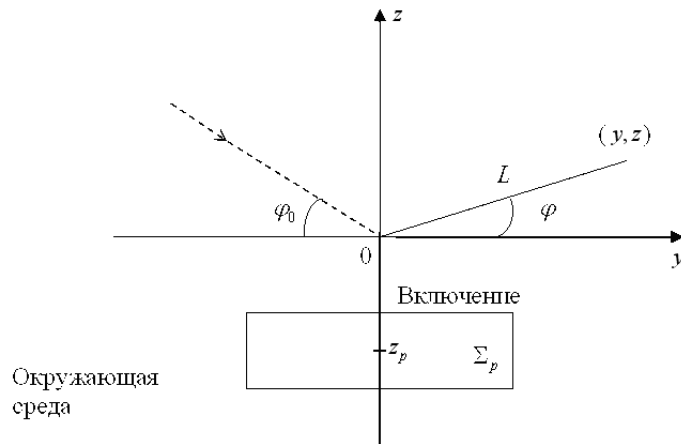


Рис. 1. Геометрия задачи

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Из уравнений Максвелла следует, что в рассматриваемом случае H -поляризации ненулевые компоненты электрического поля E_y, E_z можно выразить через единственную отличную от нуля компоненту магнитного поля H_x :

$$E_y = -\frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{4\pi}{ik_0c\varepsilon} J_y, \quad (1)$$

$$E_z = \frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{4\pi}{ik_0c\varepsilon} J_z, \quad (2)$$

где $J_{z,y}$ - проекции вектора плотности тока электрических сторонних источников, k_0 - волновое число в вакууме.

Предположим, что внутри включения отсутствуют сторонние токи, тогда выражения для электрического поля внутри включения запишутся в следующем виде:

$$E_y = -\frac{1}{ik_0\varepsilon_p} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{ik_0\varepsilon_p} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (3)$$

Исключая E_y, E_z из уравнений Максвелла, получим дифференциальные уравнения относительно основной неизвестной функции H_x . В свободном пространстве и внутри включения они принимают соответственно следующий вид:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k^2)H_x = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial^2 J_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_p^2)H_x = 0,$$

где ∇_{\perp} - оператор набла в плоскости yOz , $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$ волновое число вне включения, $k_p = k_0\sqrt{\varepsilon_p}$ - волновое число внутри включения.

Для нахождения H_x воспользуемся известной идеей [9] о том, что электромагнитное поле в присутствии тела, совпадает с полем в отсутствие тела, которое породилось бы суперпозицией тех же сторонних источников и новых, наведенных источников электрического типа с плотностями тока:

$$J_{py} = \frac{ik_0c}{4\pi} (\varepsilon - \varepsilon_p) E_y, \quad J_{pz} = \frac{ik_0c}{4\pi} (\varepsilon - \varepsilon_p) E_z, \quad (5)$$

которые локализованы внутри включения. Здесь E_y, E_z - неизвестное электрическое поле внутри включения.

Уравнение относительно H_x имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)H_x(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{\partial(J_y + J_{py})}{\partial z} - \frac{\partial(J_z + J_{pz})}{\partial y} \right], \quad (6)$$

$$-\infty < y, z < +\infty$$

Введем в рассмотрение решение $G(\vec{r}, \vec{r}')$ для задачи по отысканию $H_x(\vec{r})$, которое отвечает точечному источнику $q(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, удовлетворяющему условиям излучения на бесконечности ($|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow +\infty$).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (7)$$

Как известно, решением этого уравнения является функция Грина. Удобно выбрать функцию Грина в следующем виде:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}), \quad (8)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, y, z – определяют точку наблюдения, а y', z' – точку источника.

С помощью функции Грина мы можем решить уравнение (6), которое соответствует исходной задаче для $H_x(\vec{r})$. Ее решение запишем в виде:

$$H_x(\vec{r}) = H_{0x}(\vec{r}) + \int G(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}')d\vec{r}', \quad (9)$$

где интегрирование ведется по всей плоскости yOz .

Интегро-дифференциальное соотношение, связывающее электрическое и магнитное поле, имеет вид

$$H_x(\vec{r}) = H_{0x}(\vec{r}) + (\varepsilon_p - \varepsilon) \frac{k_0}{4} \int_{\Sigma_p} d\Sigma' [E_y(\vec{r}')\partial z' - E_z(\vec{r}')\partial y'] \times H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}), \quad (10)$$

$-\infty < y, z < +\infty$, $z', y' \in \Sigma_p$, $d\Sigma'$ - элемент плоскости Σ_p .

Подставим выражение (9) для $H_x(\vec{r})$ в прямые формулы для E_y, E_z , считая, что точка \vec{r} принадлежит области Σ_p . В результате мы получаем систему двух связанных интегро-дифференциальных уравнений:

$$E_y(\vec{r}) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} E_{0y}(\vec{r}) + \frac{i}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} - 1\right) \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Sigma_p} [E_z(\vec{r}')\partial y' - E_y(\vec{r}')\partial z'] \times \quad (11)$$

$$\times H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2})d\Sigma',$$

$$E_z(\vec{r}) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} E_{0z}(\vec{r}) - \frac{i}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} - 1\right) \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Sigma_p} [E_z(\vec{r}')\partial y' - E_y(\vec{r}')\partial z'] \times \quad (12)$$

$$\times H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2})d\Sigma',$$

где $E_{0z}(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}} H_{0x}(\vec{r})$, $E_{0y}(\vec{r}) = -\frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_{0x}}{\partial z} = \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}} H_{0x}(\vec{r})$.

Если решение этих уравнений известно, то формула (10) позволяет найти функцию $H_x(\vec{r})$ в любой точке плоскости yOz , а соответствующие прямые формулы для E_y, E_z - рассчитать эти величины всюду вне включения. Описанная последовательность действий положена в основу алгоритма решения

рассматриваемой задачи рассеяния. Полученные формулы позволяют определить рассеянное поле как в дальней, так и ближней зоне.

При исследовании распределения полей в дальней зоне используется асимптотика функции Ханкеля при условии, что ее аргумент намного больше единицы. Асимптотическая формула для x -компоненты рассеянного магнитного поля в дальней зоне:

$$H_{sx}(\vec{r}) = \frac{e^{ikL}}{\sqrt{L}} D(\varphi),$$

$$D(\varphi) = (\varepsilon_p - \varepsilon) \frac{k_0}{2} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{\Sigma_p} [\sin \varphi E_y(\vec{r}') - \cos \varphi E_z(\vec{r}')] \exp[-ik(y' \cos \varphi + z' \sin \varphi)] d\Sigma',$$

$$H_{sx}(\vec{r}) = \frac{D(\varphi)}{\sqrt{L}} e^{i(kL-3\pi/4)}, \quad E_{sy}(\vec{r}) = -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon}} H_{sx}(\vec{r}), \quad E_{sz}(\vec{r}) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon}} H_{sx}(\vec{r}).$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При отыскании численного решения уравнений (11), (12) мы аппроксимируем поперечное сечение включения ступенчатой фигурой с помощью прямоугольной сетки, которая состоит из одинаковых ячеек размером $\Delta y \times \Delta z$. Можно приближенно полагать, что в пределах каждой ячейки неизвестные величины E_y, E_z постоянны. Рассматривая интегро-дифференциальные уравнения (11), (12) в центре каждой ячейки, приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$E_{ym} = \sum_{n=1}^K (K_{mn}^{yy} E_{yn} + K_{mn}^{yz} E_{zn}) + Q_m^y, \quad (13)$$

$$E_{zm} = \sum_{n=1}^K (K_{mn}^{zy} E_{yn} + K_{mn}^{zz} E_{zn}) + Q_m^z, \quad m = 1, 2, \dots, K. \quad (14)$$

Здесь E_{ym} и E_{zm} – неизвестные значения величин E_y и E_z в m -й ячейке; K – общее число ячеек, аппроксимирующих включение Σ_p . Явный вид коэффициентов $K_{mn}^{yy}, K_{mn}^{zy}, K_{mn}^{yz}, K_{mn}^{zz}$ и правых частей Q_m^z, Q_m^y определяется из соотношений (11), (12). К примеру,

$$K_{mn}^{yy} = \frac{i}{4} \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} - 1 \right) \int_{S_n} dS_n E_z(\vec{r}') \frac{\partial^2}{\partial^2 y'} \left[H_0^{(1)}(k \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}) \right] \Big|_{r=r_m} \quad (15)$$

$$Q_m^y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}} \exp[ik(y_m \cos \varphi_0 - z_m \sin \varphi_0)], \quad (16)$$

где r_m – центральная точка ячейки с номером m , S_m – площадь m -й ячейки.

Численный расчет величин $K_{mn}^{yy}, K_{mn}^{zy}, K_{mn}^{yz}, K_{mn}^{zz}$, который сводится к вычислению линейных интегралов по контуру ячейки, описан в работах [8, 10]. Система линейных алгебраических уравнений (13) и (14) решалась численно методом Гаусса.

На рис.2, 3 представлено численное решение задачи рассеяния плоской H -поляризованной волны единичной амплитуды, которая падает из верхнего полупространства нормально к включению. Прямоугольное включение имеет размеры $k_0 h = 0.3$ $k_0 l = 0.6$. При численных расчетах включение разбивалось на 72 ячейки (12 разбиений по горизонтали, 6 – по вертикали). На рисунке сплошная линия относится к случаю однородного изотропного включения с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, $\varepsilon_p = 4$. Пунктирная линия отвечает неоднородному включению, которое состоит из чередующихся слоев параллельных оси z с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{p1} = 3$, $\varepsilon_{p2} = 4$.

Рис. 2 иллюстрирует угловое распределение поля в дальней зоне. Из рисунка видно, что рассеянное поле на неоднородном включении имеет искажения, по сравнению с рассеянным полем на однородном включении, которые обусловлены неоднородностью включения.

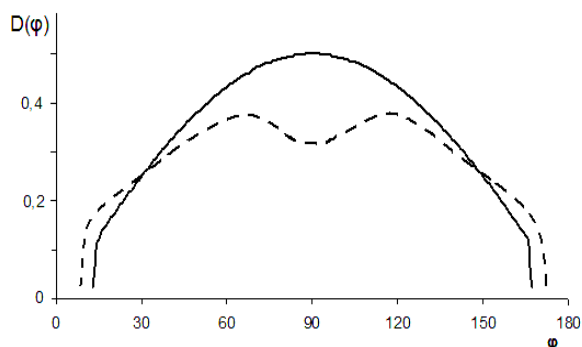


Рис. 2. Рассеянное поле на включении в дальней зоне

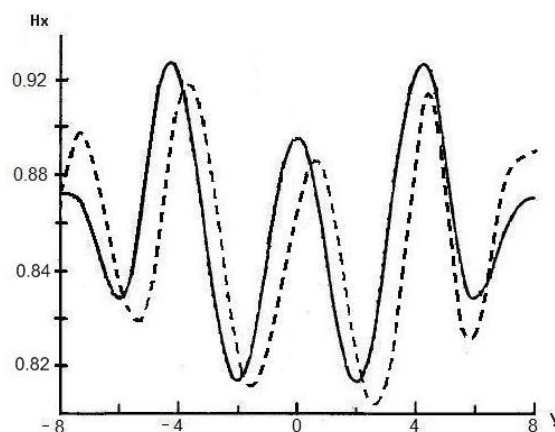


Рис. 3. Рассеянное поле на включении в ближней зоне

В случае однородного изотропного включения график на рис. 3 симметричен относительно точки $y = 0$, так как плоская волна падает нормально к включению. Осциллирующий характер приведенных зависимостей отражает значительную роль интерференционных явлений при формировании рассеянного поля в ближней зоне.

ВЫВОДЫ

С помощью метода интегро-дифференциальных уравнений и метода функции Грина найдены формулы, позволяющие определить электрическое и магнитное поле внутри и вне включения. Получены формулы, описывающие рассеянное поле как в дальней, так и в ближней зоне. Используя метод моментов и метод Гаусса для решения СЛАУ, получено численное решение задачи, приведены зависимости, иллюстрирующие распределение рассеянного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peters L. Jr., Richmond J.H. Scattering from cylindrical nonhomogeneous lossy medium // *Radio Science*. – 1982. – V. 17, №6. – P.973.
2. Uzunoglu N.K., Kanellopoulos J.D. Scattering from underground tunnels // *Journal Physics*. – 1982 – V.15, №2. – P. 459
3. Richmond J.H. Scattering by dielectric cylinder of arbitrary cross section shape // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – May 1965. – Vol. 14. – P. 334.
4. Graglia R. D., Uslenghi P. L. E. Electromagnetic scattering from anisotropic materials, Part 1: General Theory // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – August 1984. - Vol. 32. – P. 867 – 869. Electromagnetic scattering from anisotropic materials, Part 2: Computer code and results in two dimensions // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – Feb. 1987. – Vol. 35. – P. 225 – 232.
5. Graglia R. D., Uslenghi P. L. E., Zick R.S. Moment method with isoparametric elements for three – dimensional anisotropic scatterers // *Proc. IEEE*. – May. 1989. – Vol. 77. – P. 750 – 760.
6. Шульга С.Н. Влияние анизотропии среды на рассеяние электромагнитных волн подповерхностным включением // *Изв. ВУЗов Радиофизика*. – 1997. – Т. XL, №10. – с. 1249 – 1258.
7. Жук Н. П., Шульга С. Н., Яровой А. Г. Двумерная задача рассеяния электромагнитных волн на проникаемом включении в анизотропном слое // *Журнал технической физики*. – 1998. – Т. 68. № 1. – С. 84 – 88.
8. Zhuck N.P., Yarovoy A.G. Two-Dimensional Scattering from an Inhomogeneous Dielectric Cylinder Embedded in a Stratified Medium: Case of TM Polarization// *IEEE Trans.* 1994. – Vol. AP-42., N 1. – P. 16-21.
9. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986.
10. Su C.C. Calculation of Electromagnetic Scattering from a Dielectric Cylinder Using the Conjugate Gradient Method and FFT // *IEEE Trans.* –1987. – Vol. AP-35. N 12. – P. 1418-1425.