УДК 517.9:535.4

ПОТЕНЦИАЛ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ВНУТРИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Резуненко В.А.

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
e-mail: rezunenko@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию 15 ноября 2008

Получено строгое решение осесимметричной задачи электростатики. Анализируется потенциал идеально проводящего сферического сегмента, размещённого внутри сферического слоя с круговым отверстием. Использованы метод регуляризации сумматорных уравнений, выделения и обращения главной части сумматорных уравнений, метод вычетов в особых точках аналитической функции и контурного интегрирования, метод интегральных преобразований. Получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве L_2 на отрезке. Дано сравнение с известными результатами и предельными вариантами. Подтверждена эффективность построенного алгоритма. Рассмотрено обобщение задачи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электростатика, сферический сегмент, слой, интегральное уравнение Фредгольма.

Анализ электростатических потенциалов внутри ограниченных объёмов является актуальным, как в теоретическом, так и в прикладном плане. С прикладной точки зрения возникают, например, вопросы, как создать требуемое распределение электростатического поля в заданной области пространства, как устранить электрический пробой в газах, наполняющий рабочий объём электроприборов, как избежать накопления электростатических зарядов на поверхностях различных устройств. С теоретической точки зрения интересны вопросы разработки методов моделирования и численно-аналитической регуляризации задач электростатики и электродинамики для различных, в том числе сферических, объёмов со сложными границами. Также важными являются вопросы оптимизации численных алгоритмов и процедур рассматриваемых задач. Задачи электростатики на сферических структурах в некоторых случаях являются тестовыми для теоретических и прикладных направлений. Многочисленные применения сферических структур стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электростатики, электродинамики и теории дифракции [1-10]. Вместе с тем, работ, посвященных таким задачам электростатики на сферических поверхностях, явно недостаточно [2,3,8]. Целью работы является построение численно-аналитического алгоритма задачи расчета электростатического потенциала идеально проводящего сферического сегмента, помещённого внутрь сферического диэлектрического слоя с круговым отверстием, образованным секториальным вырезом из сферического слоя. Применён метод регуляризации парных сумматорных функциональных уравнений. Использованы методы работ [1-10], а также методы решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма первого и второго рода, суммирования разрывных рядов и применение контурного интегрирования для нахождения вычетов функции комплексного переменного. Получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0,\theta 2)$, для которого $(0<\theta 2<\pi)$. Рассмотрены предельные варианты постановки задачи и обобщение задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть геометрический центр сферического сегмента, центры сферических поверхностей - границ диэлектрического слоя размещены в начале сферической и декартовой систем координат. Пусть ось OZ совпадает с осью симметрии всей структуры. Радиус сферического сегмента полагаем равным a. Полярный угол, измеряющий сферический сегмент, полагаем равным $\theta 1$, на сегменте $0\le\theta<\theta 1$. Пусть сферические поверхности, ограничивающие диэлектрический слой, охватывают сферический сегмент и имеют радиусы $a1$, $a2$, при этом $a1<a<a2$. Полярный угол раскрыва секториального выреза (отверстия) из слоя - выбираем равным $\theta 2$, полагая

$\theta 1 < \theta 2$; на границе слоя $\theta = \theta 2$, на отверстии $\theta 1 < \theta < \theta 2$. Сферический сегмент и все границы слоя являются по условию идеально проводящими и бесконечно тонкими.

Электростатическое поле $\vec{E}$ должно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла, материальным уравнениям и граничным условиям:

$$rot\,\vec{E} = 0,\ div\,\vec{D} = \rho,\ \vec{E} = \varepsilon \vec{D},\ \vec{H} = \vec{B} = 0,\ [\vec{n}, (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = 0\,. \tag{1}$$

В равенствах (1) $\vec{D}$ ($\vec{B}$) - векторы электрической (магнитной) индукции, ρ - плотность поверхностных зарядов, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхностям, ε - диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей слой, $\vec{E}_1$ - полное поле в области $a1 < a$, $\vec{E}_2$ - поле в области $a < a2$, Из (1) следует, что поле $\vec{E} = -grad(u)$ с точностью до калибровочной константы, где u - электростатический потенциал. Пусть сферические границы слоя и торец слоя разделены непроводящими бесконечно тонкими прослойками. Полагаем потенциал сферического сегмента равным V, потенциал торца - равным нулю, потенциалы сферических границ слоя - равными $V1,\ V2$ соответственно для $a1 < a2$. Требуется найти полный потенциал u сферического сегмента, размещённого внутри сферического слоя с отверстием. Отметим, что исследуемая здесь задача не сводится к ранее рассмотренным задачам, например в работах [2, 3, 8].

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из уравнений Максвелла (1) следует, что полный потенциал удовлетворяет всюду вне поверхностей структуры уравнению $div(grad(u)) = 0$. Для решения рассматриваемой задачи Дирихле сначала в сферической системе координат разделим переменные и применим метод частичных областей. Отыскиваемые вторичные потенциалы представим степенными рядами Фурье-Лежандра по собственным функциям оператора Лапласа:

$$u1 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-\nu_n - 1} P_{\nu_n}(\cos\theta)\,, \qquad a1 < r < a, \tag{2}$$

$$u2 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta)\,, \qquad a1 < r < a, \tag{3}$$

$$u3 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{-\nu_n - 1} P_{\nu_n}(\cos\theta) \qquad a < r < a2, \tag{4}$$

$$u4 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta)\,, \qquad a < r < a2, \tag{5}$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n рядов (2)-(5) подлежат определению, $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ - функции Лежандра первого рода степени ν_n аргумента $\cos\theta$, $(0 \le \theta \le \theta 2)$. Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n для (2)-(5) ищем в гильбертовых пространствах числовых последовательностей $\tilde{l}_2$ с некоторыми весами, обеспечивающими выполнение условия конечности электростатической энергии и обеспечивающими построение единственного решения задачи. В (2)-(5) величины ν_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$P_{\nu_n}(\cos\theta 2) = 0, \quad 0 < \theta 2 < \pi, \quad n \ge 1. \tag{6}$$

Заметим, что выполнение равенства (6) обеспечивает выполнение граничного условия на поверхности секториального выреза (на торце) из диэлектрического слоя - при $\theta = \theta 2$. Из

уравнений (1) в частности следует, что на всех частях граничных поверхностей полные потенциалы должны быть непрерывными, а на дополнении сферического сегмента до замкнутого сегмента должны быть непрерывными частные производные потенциалов по r. Так, на сферической границе слоя при $r = a1$ граничные условия имеют вид: $u1 + u2 = V1, \quad 0 \le \theta < \theta 2$. Для построения решения задачи сначала из граничных условий получаем парные сумматорные функциональные уравнения относительно коэффициентов B_n ряда (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} B_n a^{\nu_n} [1 - (\frac{a1}{a})^{2\nu_n - 1}] - F_{n,1} (\frac{a1}{a})^{\nu_n + 1} \right\} P_{\nu_n}(\cos\theta) = V, \quad 0 \le \theta < \theta 1 , \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{L_n} \left\{ B_n \frac{1}{\varepsilon} (a1^{\nu_n} a2^{-\nu_n - 1} - a2^{\nu_n} a1^{-\nu_n - 1}) - M_n \right\} P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \theta 1 < \theta \le \theta 2 , \tag{8}$$

где

$$M_n = F_{n,2}\, a1^{-\nu_n - 1} - F_{n,1}\, a2^{-\nu_n - 1}, \quad F_{n,1} = V1 \int_1^{\cos\theta 1} P_{\nu_n}(x) dx / P_{n2} \tag{9a}$$

$$L_n = [-a^{\nu_n} a2^{-\nu_n - 1} + a2^{\nu_n} a^{-\nu_n - 1}] \; /[\, a^2 a1^{-\nu_n - 1}] , \tag{9b}$$

$$F_{n,2} = V2 \int_{\cos\theta 1}^{\cos\theta 2} P_{\nu_n}(x) dx / P_{n2} , \qquad P_{n2} = \int_1^{\cos\theta 2} (P_{\nu_n}(x))^2 dx . \tag{9c}$$

Для получения системы (7), (8) сначала из граничных условий была установлена и решена система 3-х уравнений с 4-мя неизвестными и получена линейная связь между коэффициентами A_n, B_n, C_n, D_n рядов (2)-(5), например, $A_n = \varepsilon F_{n,1}\, a1^{\nu_n} - B_n\, a1^{2\nu_n + 1}$, $n \ge 1$. Эта система имеет единственное решение, так как её определитель при $a1 < a < a2$ отличен от нуля для любых параметров задачи.

Парные функциональные уравнения (7)-(8) имеют сложное ядро в виде функций Лежандра первого рода дробной степени (дробного индекса). Коэффициенты при неизвестных B_n имеют асимптотику, отличающуюся более чем на порядок при $n \to \infty$. Величины $a, a1, a2$ (фиксированные радиусы) имеют дробные степени ν_n (6). Для решения системы (7), (8) неэффективны прямые численные методы, так как функциональные уравнения сравнительно плохо сшиваются на границе $\theta = \theta 1$ подинтервалов основного отрезка $[0, \theta 2]$. Общий метод для решения таких систем пока неизвестен. Вместе с тем к сумматорным функциональным уравнениям (7), (8) применим метод регуляризации, основанный на идеях работ [1-10].

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Сведём задачу отыскания коэффициентов B_n в (7), (8) к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода для функции $f(t)$. Для этого сначала выполним линейные переобозначения в системе (7), (8) для коэффициентов B_n, введя новые коэффициенты Y_n в (10)

$$B_n = \frac{\varepsilon [Y_n \Delta(n) \varepsilon^3 a^2 + F_{n,1}\, a2^{-\nu_n - 1} - F_{n,2}\, a1^{-\nu_n - 1}]}{a1^{\nu_n} a2^{-\nu_n - 1} - a2^{\nu_n} a1^{-\nu_n - 1}} \tag{10}$$

где

$$\Delta(n) = (a2^{2\nu_n - 1} - a^{2\nu_n - 1}) / [\varepsilon (a \Box a1 \Box a2)^{\nu_{n+1}}]. \tag{11}$$

Введём в (7), (8) параметр δ_n малости:

$$\delta_n = (R_n + S_n - 2T_n) / [1 - T_n], \tag{12}$$

где

$$R_n = (\frac{a}{a2})^{2\nu_n+1}, \quad S_n = (\frac{a1}{a})^{2\nu_n+1}, \quad T_n = (\frac{a1}{a2})^{2\nu_n+1} \quad . \qquad \textbf{(13)}$$

Этим получили относительно величин Y_n (10) новую систему функциональных уравнений, которую удобно преобразовать к интегральным уравнениям первого и второго рода. Получение интегральных уравнений выполним несколькими шагами. Для этого коэффициенты Y_n из (10) отыскиваем в следующем виде:

$$Y_n = -2\mu_n \int_0^{\theta 1} f(t)\cos(\nu_n + 1/2)dt\,, \qquad \textbf{(14)}$$

где

$$\mu_n = 1/\left\{ \sin^2(\theta 2)\frac{\partial}{\partial\theta}P_{\nu_n}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=\theta 1}\frac{\partial}{\partial\nu}P_{\nu_n}(\cos\theta 2)\Big|_{\nu=\nu n} \right\}, \qquad \textbf{(15)}$$

при этом функция $f(t)$ пропорциональна плотности поверхностного заряда на сферическом сегменте. В (14) полагаем функцию $f(t)$ непрерывной кусочно-гладкой: $f(t) \in C^1(0,\theta 2)$, а величины μ_n (15) пропорциональны норме функций Лежандра [11]. Теперь подставим коэффициенты Y_n (10) сначала в функциональное уравнение, полученное из (8) с учётом переобозначений (10) - (15). Применим интегрирование по частям. Найдём значение подынтегральной суммы

$$S_0(\varphi,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin[(n+\frac{1}{2})\varphi]P_{\nu_n}(\cos\theta). \qquad \textbf{(16)}$$

Для этого рассмотрим функцию $Z(z;\varphi,\theta,\theta 2)$ комплексного переменного z:

$$Z(z;\varphi,\theta,\theta 2) = \exp[i(n+\frac{1}{2})\varphi]\cdot$$

$$\left\{ G_z(\cos(\theta 2)) + G_{-z-1}(\cos(\theta 2)) \right\}[P_z(\cos(\theta)/P_z(\cos(\theta 2))] \qquad \textbf{(17)}$$

где $G_z(\cos\theta)$ - функция Лежандра 2-го рода комплексного индекса z; φ, θ, $\theta 2$ - параметры. Функция $Z(z;\varphi,\theta,\theta 2)$ имеет полюсы первого порядка в точках $z = n + \frac{1}{2}$ и $z = \nu n$ (6) [10]. Выполним контурное интегрирование функции $Z(z;\varphi,\theta,\theta 2)$ (17), выбирая часть контура в виде отрезка прямой $z = -\frac{1}{2} + iy$, параллельного оси OZ, для которого $0 < |y| < R1 < \infty$, и часть контура - полуокружность, замкнутую вправо, радиуса $R1$ с центром в точке $z = -\frac{1}{2}$. По теореме о вычетах [10] и, используя значение вронскиана функций $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ и $G_{\nu_n}(\cos\theta)$, находим, например вычеты в точках $z = \nu n$, равные величине

$$P_{\nu n}(\cos\theta)\exp[(n+\frac{1}{2})\theta 2]/\left\{ \sin^2(\theta 2)[P_{\nu n}(-\cos\theta)]'\Big|_{\theta=\theta 1}\frac{\partial}{\partial z}P_z(\cos\theta 2)\Big|_{z=\nu n} \right\}.$$

Найдя все вычеты функции $Z(z;\varphi,\theta,\theta 2)$ (17), затем устремим радиус полуокружности $R1$ к бесконечности и оценим интеграл по контуру с помощью леммы Жордана [10]. В результате получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \exp[i(n+\frac{1}{2})\varphi]P_{\nu_n}(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\theta)\exp[i(n+\frac{1}{2})\varphi]+I(\theta,\varphi)\ , \qquad (18)$$

где

$$I(\theta,\varphi)=-\int_0^{\infty}P_{-1/2+iy}(-\cos\theta 2)P_{-1/2+iy}(\cos\theta)\frac{ch(\varphi y)}{ch(\pi y)}/P_{-1/2+iy}(\cos\theta 2)dy\ . \qquad (19)$$

Интеграл в (19) сходится равномерно и представляет собой непрерывную функцию. Для (16) рассмотрим в (18) отдельно реальные и мнимые части. Учтя значение следующей вспомогательной суммы ряда по полиномам Лежандра и по тригонометрическим функциям

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin[(n+\frac{1}{2})\varphi]P_n(\cos\theta)=0, \qquad 0\le\varphi<\theta<\pi, \qquad (20)$$

получаем из (18), что сумма (16) обращается в ноль: $S_0(\varphi,\theta)=0,\quad 0\le\varphi<\theta\le\theta 2.$ **Этим показали, что подстановками (10) - (15) функциональное уравнение, полученное из (8), выполняется тождественно.**

Теперь рассмотрим функциональное уравнение (7) после переобозначения отыскиваемых коэффициентов B_n **(3) на коэффициенты** Y_n **(10), введения параметра малости** δ_n **(12) и подстановок (12) – (15):**

$$\sum_{n=1}^{\infty}Y_n P_{\nu_n}(\cos\theta) = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{Y_m\delta_m + N1_m\right\}P_{\nu_m}(\cos\theta)-aV\ , \qquad 0\le\theta<\theta 1, \qquad (21)$$

где

$$N1_m = F_{m1}\left\{(\frac{a1}{a})^{\nu_m+1}-\frac{a^{\nu_m-1}a1^{\nu_m+1}}{a2^{2\nu_m}}\frac{1-S_m}{1-T_m}\right\}-F_{m2}\frac{1-S_m}{1-T_m}(\frac{a}{a2})^{\nu_m}. \qquad (22)$$

Для частичного обращения главной части функционального уравнения (21) применим, в частности, контурное интегрирование, нахождение вычетов аналитической функции и решим вспомогательное интегральное уравнение Вольтерра I рода. С этой целью после подстановки Y_n **(10) в (21), учтём, что ряды в левой и правой частях равенства (21) есть функции из пространства** $L_2(0,\theta 2)$**, и поменяем порядки суммирования и интегрирования. Теперь рассмотрим на отрезке** $[0,\theta 1)$ **две возникшие подынтегральные суммы -** $S_1(\varphi,\theta)$ **и** $S_2(\varphi,\theta)$**:**

$$S_1(\varphi,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\cos[(n+\frac{1}{2})\varphi]P_{\nu_n}(\cos\theta), \qquad (23)$$

$$S_2(\varphi,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\mu_n\cos[(n+\frac{1}{2})\varphi]P_{\nu_n}(\cos\theta); \qquad (24)$$

сумма $S_1(\varphi,\theta)$ **(23) входит в левую часть (21), а** $S_2(\varphi,\theta)$**-в правую часть (21). Сумму** $S_1(\varphi,\theta)$ **вычисляем по (18), затем подставляем в левую часть (21) и получаем функцию** $H(\varphi,\theta)$**:**

$$H(\varphi,\theta)=\int_0^{\theta}f(x)/\sqrt{2[\cos(x)-\cos(\theta)]}\,dx+\int_0^{\theta 1}f(x)I(\theta,x)dx\ . \qquad (25)$$

Рассмотрим сумму $S_2(\varphi,\theta)$ **(24). Используем интегральное представление Мелера – Дирихле для функций Лежандра [11]**

$$P_{\nu}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\cos[(\nu+\frac{1}{2})x]/\sqrt{\cos(x)-\cos(\theta)}\,dx \qquad (26)$$

и подставим (26) в (24). Так как ряд в (24) сходится равномерно, то, изменив порядок суммирования и интегрирования, получаем, в частности, функцию

$$K1(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\mu_n\cos[(v_n+\frac{1}{2})t]\cos[(v_n+\frac{1}{2})x], \tag{27}$$

где величины δ_n введены в (12), а μ_n определены в (15) .

Подставим (23) - (27) в (21) и получим неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода следующего вида:

$$\int_0^{\theta} F(\varphi)/\sqrt{2[cos(\varphi)-\cos(\theta)]}d\varphi = G1(\theta),\ G1(0)=0\,. \tag{28}$$

где $F(\varphi)$ - искомая функция, $G1(\theta)$ - известная функция, при этом $F(\varphi)$, $G1(\theta)\in L_2(0,\theta2)$. Спектр интегрального оператора Вольтерра (28) в пространстве $L_2(0,\theta2)$ имеет предельную точку $\{0\}$; решение $F(\varphi)$ интегрального уравнения единственно. Функцию $F(\varphi)$ находим аналитически, применяя интегральное преобразование - композицию с ядром вида $(\cos(\varphi)-\cos(\theta))^{-1/2}$. В результате получаем итоговое интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно искомой функции $f(t)$ (14):

$$f(t)-\int_0^{\theta 1}\{K1(t,x)-K2(t,x)\}f(x)dx=\frac{2}{\pi}V\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}N1_n\cos\left(v_n+\frac{1}{2}\right)t, \tag{29}$$

где ядро $K1(t,x)$ введено в (27) , $0\le x\le t<\theta1$, коэффициенты $N1_n$ - определены в (22), и

$$K2(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}P_{-1/2+iy}(-\cos\theta2)\frac{\mathrm{ch}(ty)\,\mathrm{ch}(xy)}{\mathrm{ch}(\pi y)}/P_{-1/2+iy}(\cos\theta2)dy \tag{30}$$

ВЫВОДЫ

Интегральное уравнение (29) имеет единственное решение. Действительно, ряд (27) сходится равномерно по t,x на $[0,\theta1]$, так как параметр малости δ_n (15) стремится к нулю при $n\to\infty$ как степенная функция. Интеграл в (30) сходятся равномерно по t,x на сегмента $[0,\theta1]$. Следовательно, ядро $\{K1(t,x)-K2(t,x)\}$ уравнения (29) является непрерывной функцией аргументов t,x; правая часть уравнения также непрерывна на сегмента $[0,\theta1]$. Оператор интегрального уравнения является компактным [12,13]. Для уравнения (29) справедлива альтернатива Фредгольма. Однородное уравнение соответствующее (29), имеет единственное решение. Интегральное уравнение (29) для любых значений $\theta1$ из $[0,\theta2]$ разрешимо численно, а для малых $\theta1$ разрешимо, например, методом последовательных приближений [12-14]. Для получения (таблица 1) приближенных значений v_n, $n\ge1$, (6) используем для функций Лежандра различные представления [10,11].

Таблица 1. Корни v_n функций Лежандра первого рода $P_{v_n}(\cos\theta2)$ **(6).**

$\theta2\backslash n$	1	2	3	10	20	30	40	50	60	70
90^0	1	3	5	19	39	59	79	99	119	139
60^0	1.77	4.76	7.76	25.75	58.75	88.75	118.75	148.75	178.75	208.75
15^0	8.69	20.58	32.55	104.51	236.51	356.51	476.50	596.50	716.50	836.50

Найдя значения потенциалы $u_1,\dots,u_4$ (2)-(5), вычисляем электростатическое поле (1) так:

$\vec{E} = -\frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$, где $\vec{e}_r$. $\vec{e}_\theta$ - единичные векторы. Ряды, определяющие поле $\vec{E}$ и потенциалы (2)-(5), допускают модификацию и являются быстро сходящимися. Полный потенциал, являясь гармонической функцией, удовлетворяет принципу максимума в диэлектрическом слое и нетривиально пропорционален обратной величине r_{ab}, где r_{ab} - кратчайшее расстояние между проводниками Плотность поверхностного заряда σ при приближении к ребру сферического сегмента имеет требуемое поведение $O((1/\sqrt{r}))$, $r \to 0$. Ёмкость C сферического конденсатора приближённо (при $a1 << a << a2$ и $0 \le \theta << 1$) вычисляем так: $C = \frac{a}{V}\int_0^{\theta 1} f(t)\cos\frac{t}{2}dt$, где функция $f(t)$ (14) – решение интегрального уравнения (29), a - радиус сферического сегмента и V - потенциал сегмента.

Тестовым для рассматриваемой задачи является вариант, когда сферический сегмент, размещённый внутри диэлектрического слоя, исчезает и угол раскрыва сегмента $\theta 1 \to 0$. При этом коэффициенты B_n, C_n рядов (3), (4) обращаются в нуль, так как для (10) по лемме Римана [12] получаем $\lim_{\theta 1 \to 0} Y_n$ =0. При этом коэффициенты A_n, D_n рядов (2), (5) приобретают вид:

$$A_n = \varepsilon(a1)^{\nu_n+1}\frac{F_{n1} - F_{n2}(a1/a2)^{\nu_n}}{1-(a/a2)^{2\nu_n+1}}, D_n = \varepsilon(a2)^{-\nu_n}\frac{F_{n2} - F_{n1}(a1/a2)^{\nu_n+1}}{1-(a/a2)^{2\nu_n+1}}, \qquad (31)$$

где величины F_{n1}, F_{n2} определены в (9a)-(9c). Отметим, что тестовый вариант, когда для сферического сегмента увеличивается угол раскрыва $(\theta 1 \to \theta 2)$ и становится максимально воэможным, сводится к рассмотренному варианту (31).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ziolkowski R. and Kipple A.D. Application on Double Negative Materials to Increase the power by Elecrtrically Small Antennas. // IEEE Transaction on AP. - oct. 2003. - Vol. 52, 10, P. 2626-2640.
2. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в журнал Техн. Физ. -1976.-т.2 , 217 - С. 794-798.
3. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, в.10-11. - С. 1193-1206.
4. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
5. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.
6. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8, в.10-11. - С. 4-78.
7. Свищёв Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. // ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т.12. - С. 56-60.
8. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А. Расчёт потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом. // Радиотехника. Изд. ХГУ - 1990. - Т.89. - С. 130-134.
9. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. // Электромагнитные волны и электронные системы. - 2005. - Т.10, в.8. - С. 3-15.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: - Наука, - 1973. - 736 с.
11. Бейтмен Г. , Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. - М.: - Наука, - 1974. - 295 с.
12. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.
13. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. -368 с
14. Верлань,А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543