

УДК 576.8.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ ИМПЕДАНСНОМ ЦИЛИНДРЕ, ВОЗБУЖДАЕМОМ НИТЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В.И. Вьюнник, А.А. Звягинцев

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
Харьков, пл. Свободы 4, 61077*

Поступила в редакцию 31.03.2009 г.

В работе рассматривается задача рассеяния электромагнитных волн выпуклым импедансным цилиндром, возбуждаемым нитью электрического тока, расположенной вблизи его поверхности. Использован метод асимптотической теории дифракции, предложенный Фокком. Получены асимптотические интерполяционные формулы для вычисления диаграммы направленности системы нить тока–цилиндр, для случая кругового и эллиптического импедансных цилиндров. Полученные формулы пригодны для расчетов как в теневой так и в освещенной областях. Показано, что эти формулы могут быть распространены на случай произвольного выпуклого импедансного цилиндра с переменной кривизной.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифракция, асимптотический метод, интерполяция, выпуклый импедансный цилиндр.

У роботі розглядається задача розсіювання електромагнітних хвиль опуклим імпедансним циліндром, що збуджується ниткою електричного струму, розташованою поблизу його поверхні. Використаний метод асимптотичної теорії дифракції, запропонований Фоком. Отримані асимптотичні інтерполяційні формули для обчислення діаграми спрямованості системи нитка струму–циліндр, для випадку кругового та еліптичного імпедансних циліндрів. Отримані формули придатні для розрахунків як в тіньовій, так і в освітленій областях. Показано, що ці формули можуть бути поширені на випадок довільного опуклого імпедансного циліндра із змінною кривизною.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дифракція, асимптотичний метод, інтерполяція, опуклий імпедансний циліндр.

In the work considered the problem of diffraction electromagnetic waves on the convex impedance cylinder excited by string of the electric current, located near to its surface. The method asymptotic theories of the diffraction, offered by Fok is used. Are received asymptotic interpolation formulas for calculation radar cross section of the system string the current - cylinder, for a case of circular and elliptic impedance cylinders. The received formulas are suitable for calculations both in shadow and in lighted areas. It is shown, that these formulas can be distributed on a case of the any convex impedance cylinder with variable curvature.

KEY WORDS: diffraction, asymptotic method, interpolation, convex impedance cilinder.

Методы геометрической теории дифракции (ГТД) широко используются при решении различных задач рассеяния. Одним из таких методов является подход, предложенный Фокком [1]. В настоящей работе данный подход используется для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на импедансном круговом цилиндре, возбуждаемом бесконечной нитью электрического тока, расположенной вблизи его поверхности.

Имеется ряд работ, в которых подобные задачи решались с применением метода ГТД. Так в работе [2] приведено решение задач излучения из отверстий (в том числе щелей) в выпуклых идеально проводящих поверхностях. В работе [3] приведено решение задачи определения поля вблизи поверхности импедансного выпуклого цилиндра при дифракции плоской электромагнитной волны. Однако полученные в ней выражения для случая выпуклого цилиндра произвольной кривизны дают большую погрешность в глубине освещенной зоны.

В данной работе получены интерполяционные формулы, пригодные для вычисления полного поля как в теневой так и в глубине освещенной зоны.

ПОЛУЧЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОЛНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ИМПЕДАНСНОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим бесконечно протяженный импедансный круговой цилиндр, возбуждаемый нитью электрического тока бесконечной длины, расположенной вблизи поверхности цилиндра (на расстоянии

$\rho - a$) (см. рис. 1).

При этом единственная отличная от нуля E_z компонента электрического поля может быть представлена в виде

$$E_z = -\frac{Ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \cdot \left[J_n(k\rho) - \frac{J'_n(ka) + QJ_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka) + QH_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) \right] H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi, \quad (1)$$

где k – волновое число, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $J_n, J'_n, H_n^{(1)}, H_n^{(1)'}$ – функции Бесселя и Ханкеля и их производные соответственно, I – ток источника, ε , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Входящий в выражение коэффициент

$$Q = \begin{cases} i\delta & \text{в случае Н – поляризации;} \\ i\frac{1}{\delta} & \text{в случае E – поляризации,} \end{cases} \quad (2)$$

где δ представляет собой приведенный поверхностный импеданс.

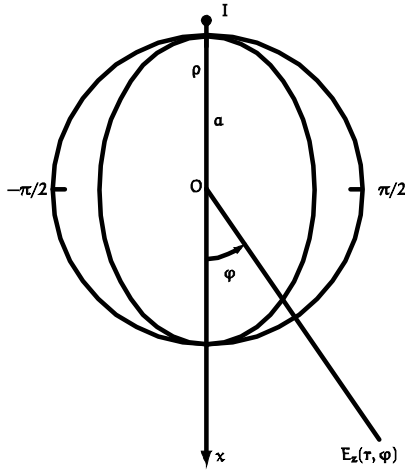


Рис. 1: Геометрия задачи

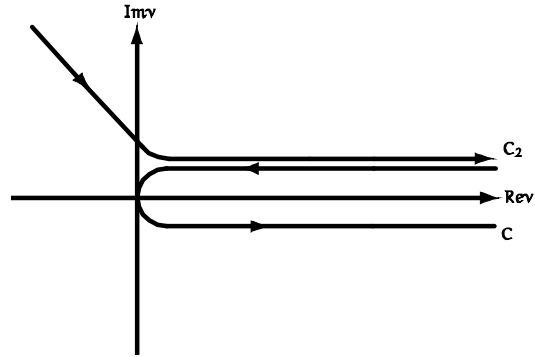


Рис. 2: Контуры интегрирования

В дальней зоне ($kr \rightarrow \infty$) мы можем заменить функцию Ханкеля ее асимптотикой

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{-\frac{i\pi n}{2}}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$E_z = -I\sqrt{\frac{\mu k}{8\varepsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot \left[J_n(k\rho) - \frac{J'_n(ka) + QJ_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka) + QH_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) \right] e^{\frac{i\pi n}{2}} \cos n\varphi. \quad (4)$$

Применяя преобразование Ватсона, потенциал поля может быть записан как

$$E_z = iI\sqrt{\frac{\mu k}{8\varepsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_C \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu. \quad (5)$$

Контур интегрирования C охватывает положительную часть вещественной оси ν (см. рис. 2)). В силу четности подынтегрального выражения в (5) контур интегрирования C можно заменить контуром C_2 и

записать

$$E_z = -iI \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu} \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu. \quad (6)$$

В подынтегральном выражении (6) представим член $\frac{e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu}$ как

$$\frac{e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu} = -2ie^{i\frac{\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi + \frac{e^{i\frac{3\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu}. \quad (7)$$

С учетом (7) представим (6) в виде суммы

$$E_z = E_{z1} + E_{z2}, \quad (8)$$

где

$$E_{z1} = -2I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu \quad (9)$$

и

$$E_{z2} = -iI \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} \frac{e^{i\frac{3\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu. \quad (10)$$

Представим (9) в виде

$$\begin{aligned} E_{z1} &= -2I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \left(\frac{e^{i\nu\varphi} + e^{-i\nu\varphi}}{2} \right) \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu = \\ &= -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{i\nu(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu - \\ &\quad - I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{i\nu(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] d\nu. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь выражение (10). Разлагая входящий в подынтегральное выражение множитель

$$\frac{e^{i\frac{3\nu\pi}{2}} \cos \nu\varphi}{\sin \pi\nu} = -i \left(e^{i\nu(\frac{5}{2}\pi + \varphi)} + e^{i\nu(\frac{5}{2}\pi - \varphi)} + \dots \right) \quad (12)$$

и подставляя полученное разложение в (10), имеем

$$E_{z2} = -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{iv(\frac{5}{2}\pi + \varphi)} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] dv -$$

$$-I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} e^{iv(\frac{5}{2}\pi - \varphi)} \cdot \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(ka) + QJ_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)'}(ka) + QH_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] dv. \quad (13)$$

С учетом того, что нить с током расположена близко к поверхности цилиндра ($k(\rho - a) \ll k\rho$) можно записать

$$J_\nu(ka) \approx \frac{1}{M\sqrt{\pi}} v(t), \quad J'_\nu(ka) \approx -\frac{1}{M^2\sqrt{\pi}} v'(t); \quad (14)$$

$$H_\nu^{(1)}(ka) \approx -\frac{i}{M\sqrt{\pi}} w_1(t), \quad H_\nu^{(1)'}(ka) \approx \frac{i}{M^2\sqrt{\pi}} w_1'(t); \quad (15)$$

$$J_\nu(k\rho) \approx \frac{1}{M\sqrt{\pi}} v(\tau), \quad H_\nu^{(1)}(k\rho) \approx -\frac{i}{M\sqrt{\pi}} w_1(\tau), \quad (16)$$

где $M = (\frac{ka}{2})^{\frac{1}{3}}$, а v , v' , w_1 , w_1' – функции Эйри и их производные в нотации Фока (см. например [4]).

Сравнивая $\nu = ka + Mt$ с $\nu = k\rho + M\tau$ находим, что

$$t - \tau = \frac{\nu - ka}{M} - \frac{\nu - k\rho}{M} = \frac{k(\rho - a)}{M} = h \quad (17)$$

С учетом (17) запишем (16) как

$$J_\nu(k\rho) \approx \frac{1}{M\sqrt{\pi}} v(t-h), \quad H_\nu^{(1)}(k\rho) \approx -\frac{i}{M\sqrt{\pi}} w_1(t-h). \quad (18)$$

Осуществляя подстановку (14), (15) и (18) в выражения (11) и (13) и переходя к интегрированию по t (с учетом того, что $dv = Mdt$) получим

$$E_{z1} = -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi^2 r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{ika(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \int_{\Gamma} e^{iM(\frac{\pi}{2} + \varphi)t} \cdot \left[v(t-h) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-h) \right] dt -$$

$$-I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi^2 r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{ika(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \int_{\Gamma} e^{iM(\frac{\pi}{2} - \varphi)t} \cdot \left[v(t-h) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-h) \right] dt, \quad (19)$$

и

$$E_{z2} = -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi^2 r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{ika(\frac{5}{2}\pi + \varphi)} \int_{\Gamma} e^{iM(\frac{5}{2}\pi + \varphi)t} \cdot [v(t-h) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-h)] dt -$$

$$-I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi^2 r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} e^{ika(\frac{5}{2}\pi - \varphi)} \int_{\Gamma} e^{iM(\frac{5}{2}\pi - \varphi)t} \cdot [v(t-h) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-h)] dt, \quad (20)$$

где $q = QM$ а Γ – контур в плоскости комплексного переменного от $e^{i\frac{2\pi}{3}}\infty$ до 0 и от 0 до ∞ .

Вводя обозначение

$$g(\xi) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\xi t} \cdot \left[v(t-h) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-h) \right] dt \quad (21)$$

выражение для E_z может быть записано как

$$E_z = -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{ikr} \left(e^{ika(\frac{\pi}{2}+\varphi)} g(M(\frac{\pi}{2}+\varphi)) + e^{ika(\frac{\pi}{2}-\varphi)} g(M(\frac{\pi}{2}-\varphi)) \right) - \\ - I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{ikr} \left(e^{ika(\frac{5}{2}\pi+\varphi)} g(M(\frac{5}{2}\pi+\varphi)) + e^{ika(\frac{5}{2}\pi-\varphi)} g(M(\frac{5}{2}\pi-\varphi)) \right). \quad (22)$$

Полученное нами выражение (22) для E_z -компоненты полного поля неприменимо в освещенной области. Для получения универсальной формулы применим подход, изложенный в [5]. Для этого примем, что

$$M\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = M \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = M \cos(\varphi). \quad (23)$$

Обозначим $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ и выразим ψ , находящийся под знаком синуса через арксинус следующим образом

$$\psi = \arcsin\left(\frac{M\psi}{M}\right). \quad (24)$$

Раскладывая арксинус в ряд, приходим к выражению

$$\psi = \frac{M\psi}{M} + \frac{1}{6} \frac{(M\psi)^3}{M^3} = \sin(\psi) + \frac{1}{6} \frac{(M\psi)^3}{M^3}. \quad (25)$$

С учетом (25) и (23) запишем

$$e^{ika\psi} = e^{ika \sin(\psi)} e^{ika \frac{1}{6} \frac{(M\psi)^3}{M^3}} = e^{ika \sin(\psi)} e^{i \frac{(M\psi)^3}{3}} = e^{ika \cos(\varphi)} e^{i \frac{(M \cos(\varphi))^3}{3}}. \quad (26)$$

Ограничимся в выражении (22) первыми двумя членами и подставляя в него (26) с учетом (23) получим интерполяционную формулу

$$E_z = -I \sqrt{\frac{\mu k}{8\epsilon\pi r}} e^{ikr} \left(e^{ika(\frac{\pi}{2}+\varphi)} g(M(\frac{\pi}{2}+\varphi)) + e^{ika \cos(\varphi)} e^{i \frac{(M \cos(\varphi))^3}{3}} g(M \cos(\varphi)) \right). \quad (27)$$

Формула (27) пригодна для вычисления поля как в теневой так и в освещенной области. Важно отметить, что формула (27) дает корректные результаты только при малых расстояниях нити тока от поверхности цилиндра, т.к. она выведена в предположении, что величина $\rho - a$ мала по сравнению с радиусом цилиндра.

ПОЛУЧЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОЛНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ИМПЕДАНСНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Полученная выше интерполяционная формула может быть распространена на случай импедансного выпуклого цилиндра с переменной кривизной, в частности эллиптического.

Рассмотрим выражение (22) и ограничимся в нем первыми двумя членами. Аргументы $M(\frac{\pi}{2} + \varphi)$ и

$M(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ представляют собой величины, характеризующие набег фазы волны, обходящей цилиндр по часовой и против часовой стрелки, соответственно (см. рис. 1). Величины же $a(\frac{\pi}{2} + \varphi)$ и $a(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ определяют длину дуги, которую проходит волна по поверхности цилиндра.

Как показано в работе [2] в случае дуги с переменной кривизной, величина характеризующая набег фазы, определяется как интеграл вида

$$\xi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\rho_g} \left(\frac{k\rho_g}{2} \right)^{\frac{1}{3}} dt, \tag{28}$$

где t -длина дуги, ρ_g -радиус кривизны, а длина дуги определяется как интеграл

$$t = \int_0^t dt'. \tag{29}$$

В случае эллиптического цилиндра, выражая величины dt' и ρ_g через эллиптические координаты получим

$$\xi = \int_0^\eta \frac{ch(\mu)sh(\mu)}{[ch^2(\mu) - \cos^2(\eta)]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{kf \frac{[ch^2(\xi) - \cos^2(\eta)]^{\frac{3}{2}}}{ch(\xi)sh(\xi)}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{ch^2(\mu) - \cos^2(\eta)} d\eta \tag{30}$$

и

$$t = \int_0^\eta \sqrt{ch^2(\mu) - \cos^2(\eta)} d\eta. \tag{31}$$

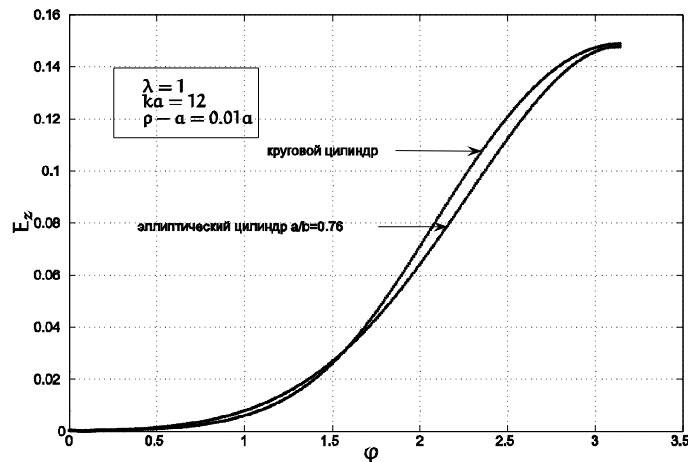


Рис. 3: E_z -компонента полного поля системы нить тока-цилиндр.

Поскольку интерполяция приводит к замене $\frac{\pi}{2} - \varphi$ на $\cos \varphi$, то для получения интерполяционной формулы для эллиптического цилиндра, необходимо в выражениях (30) и (31) заменить $d\eta$ на $-\sin(\eta)d\eta$.

На рисунке 3 приведены результаты расчета диаграмм направленности полного поля для случая идеально-проводящих кругового цилиндра и эллипса. Сравнение результатов, полученных с использованием интерполяционных формул с результатами, полученными другими методами, показало хорошее совпадение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены интерполяционные формулы для вычисления E_z – компоненты полного поля в дальней зоне, при возбуждении импедансного выпуклого цилиндра нитью электрического тока, расположенной вблизи его поверхности.

Результаты расчетов, выполненных по данным формулам, показали хорошее совпадение с результатами, полученными другими методами, как в теневой так и в глубине освещенной зоны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн – М.: Советское радио, 1970. – 517 с.
2. Pathak, P., R. Kouyoumjian An analysis of the radiation from apertures in curved surfaces by the geometrical theory of diffraction // Proc. IEEE . – 1974. – Vol. 62, no. 11.– P. 1438 – 1447.
3. Syed, H. An asymptotic analysis of the plane wave scattering by a smooth convex impedance cylinder: Tech. Rep. 025921-9-T, 1990. – January. – 31 pp.
4. Фок В.А. Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности – М.: Изд. АН СССР, 1946. – 80 с.
5. Горяинов А.С. Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре // Радиотехника и электроника . – 1958. – Т. 3, №5. – С. 603—614.