Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Радіофізика та електроніка". №853, випуск 14, 2009. С. 57-63 .

УДК 517.9:535.4

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ЖЁСТКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЕГМЕНТЕ, ЭКРАНИРУЮЩЕМ МЯГКИЙ ШАР

В.А. Резуненко
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
e-mail: rezunenko@univer.kharkov.ua
Поступила в редакцию 12 мая 2009

Построено решение осесимметричной задачи акустики в строгой постановке. Анализируется потенциал плоской акустической волны, дифрагированной на жёстком сферическом круговом сегменте, экранирующем мягкий шар. Использованы метод регуляризации парных сумматорных уравнений, метод интегральных преобразований, выделения и обращения главной части сумматорных уравнений. Получена эффективно разрешимая система линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве l_2. Дано сравнение с известными результатами и предельными вариантами постановки задачи. Подтверждена эффективность построенного алгоритма. Рассмотрены некоторые резонансные частоты и обобщение задачи.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: акустика, сфера с круговым отверстием экранированный шар, резонансные частоты, линейные алгебраические уравнения второго рода.

Побудований розв'язок вісесимметричної задачі акустики у строгій постановці. Аналізується потенціал швидкості акустичної плоскої хвилі, дифрагованої на жорсткому сферичному круговому сегменті, що екранує м'яку кулю. Використані методи: регуляризації парних суматорних рівнянь, інтегральних перетворень, напівобернення парних суматорних рівнянь, виділення і обернення головної частини суматорних рівнянь. Одержана ефективно розв'язувана система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним оператором у гільбертовому просторі l_2. Надано порівняння щодо відомих результатів і граничних варіантів постановки проблеми. Підтверджена ефективність побудованого алгоритму. Розглянуто деякі резонансні частоти структури і узагальнення задачі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: акустика, сферичний сегмент, екранована куля, резонансні частоти, алгебраїчні рівняння другого роду.

A solution of the axisymmetrical problem of acoustics in strict formulation is built. The acoustic potential of the velocity of the plane wave, diffracted on the hard spherical circular segment, shielding of the ball is analyzed. The method of regularization of the paired summarized equations is used. The method of the integral transformations is applied. The principal part of the summarized equations is isolated and inverted. The effectively solvable system of the linear algebraic equations of the second kind with the compact operator in the Hilbert space l_2 is obtained. Comparison with the known results and limited cases of the problem is given. The effectiveness of the constructed algorithm is confirmed. Some resonance frequencies and generalization of the task are examined.
KEY WORDS: acoustics, spherical segment, shielding ball, resonance frequencies, algebraic equations of the second kind.

В последнее время интенсивно развивается акустоэлектроника. Она использует наиболее эффективные методы решения задач электродинамики, математической физики, моделирования. Большую роль в этом направлении играет исследование задач на классических, например, сферических поверхностях. Замкнутая сфера и сфера с круговым отверстием имеет широкое применение, она может рассматриваться прототипом многих устройств, в том числе и резонатора Гельмгольца. Жёсткая сферическая поверхность может рассматриваться, например, как модель пъезокерамического электроакустического преобразователя [1-6]. Жёсткая сфера в некотором приближении может рассматриваться моделью Солнца, акустические волны которого в настоящее время интенсивно изучаются. Для решения задач дифракции и электродинамики на различных, в том числе и на сферических поверхностях, известны эффективные методы решения прямых и обратных задач. К таким методам относится, в частности, метод полуобращения матричного оператора задачи [7-12]. Метод полуобрашения сравнительно хорошо себя зарекомендовал при исследовании резонансных эффектов, когда характерные размеры рассеивающих структур сравнимы с длинами падающих волн. Для задач акустики метод полуобращения, к сожалению, применяется не достаточно активно. В данной работе применяется метод полуобращения матричного оператора задачи дифракции плоской акустической волны на жёсткой сфере с круговым отверстием (на сферическом сегменте), экранирующей мягкий шар [7-12]. Получена и исследована система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным матричным оператором в гильбертовом пространстве числовых последовательностей l_2. Рассмотрены варианты постановки задачи. Рассмотрены некоторые резонансные колебания структуры и обобщение задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью данной работы является построение решения задачи дифракции плоской акустической волны на жёстком круговом сферическом сегменте (на сфере с круговым отверстием), который экранирует концентрический мягкий шар. Полные акустические потенциалы скоростей исходной и вторичных акустических волн U должны всюду вне поверхности сферического сегмента и вне шара удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU)) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2U = 0 \qquad (1)$$

и удовлетворять граничным условиям; здесь $k = \omega / c$ - волновое число, ω - круговая частота, c - скорость света. На границе - на всей поверхности s мягкого шара полные потенциалы скоростей U должны обращаться в нуль $U\big|s = 0$; на поверхности s_1 сферического сегмента нормальные производные полных потенциалов должны обращаться в нуль $\frac{\partial}{\partial n}(U)\big|s_1 = 0$, на дополнении сферического сегмента до замкнутой сферы (то есть на отверстии cs_1 в сфере) полные потенциалы должны быть непрерывными $U\big|(cs_1 - \alpha) = U\big|(cs_1 + \alpha);\ \alpha > 0,\ \alpha \to 0$ Полные потенциалы должны удовлетворять условию конечности интеграла акустической энергии в любом ограниченном объёме пространства R^3, в том числе объёме, содержащем ребро сферического сегмента, а также удовлетворять условию затухания звука на бесконечности. В такой постановке задача Неймана для уравнения Гельмгольца (1) имеет единственное решение.

СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разместим общее начало сферической и декартовой систем координат в общий центр замкнутого мягкого шара радиуса a_0 и в центр сферы с круговым отверстием радиуса a_1 (в центр сферического сегмента), полагая $a_0 < a_1$. Пусть ось OZ является осью симметрии структуры. Пусть на отверстии внешней сферы (сегмента) полярный угол θ меняется на отрезке $\left(\theta_0, \pi\right]$. Для использования метода частичных областей разбиваем пространство R^3 на три области: $0 \le r < a_0,\ a_0 < r < a_1,\ r > a_1$. Отыскиваем полные потенциалы скоростей во второй и третьей областях, а в первой области ($0 \le r < a_0$) полагаем, что полный потенциал равен нулю. Зависимость потенциалов от времени полагаем гармонической $\exp(-i\omega t)$. Используя метод разделения переменных в сферической системе координат для уравнения (1), потенциал скоростей заданной плоской волны $U_0 = U_0(r,\theta)$ представим следующим рядом Фурье:

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n j_n(kr) P_n(\cos\theta), \qquad r \in [0,\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \qquad (2)$$

где

$$F_n = (-i)^n(2n+1),\ z < 0, \quad F_n = (i)^n(2n+1),\ z > 0. \qquad (2a)$$

В (2) $j_n(kr)$ - сферические функции Бесселя первого рода в обозначениях Дебая аргумента kr, $P_n(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра первого рода порядка n нулевой степени аргумента $\cos\theta$. В (2), (2a) коэффициенты F_n определяют направление распространения плоской волны: из нижнего полупространства - при $z<0$, или из верхнего полупространства – при $z>0$. Потенциалы U_1, U_2, U_3 вторичных полей представим в виде ряда (2):

$$U_1=\sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta),\quad U_2=\sum_{n=0}^{\infty} B_n F_n j_n(kr)P_n(\cos\theta),\quad a_0<r<a_1;$$

$$U_3=\sum_{n=0}^{\infty} C_n F_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta),\qquad r>a_1, \tag{3}$$

где искомые коэффициенты A_n, B_n ,C_n (3) должны принадлежать пространству числовых последовательностей $\tilde{l}_2$, обеспечивающему выполнение условия конечности интеграла акустической энергии. Полиномы Лежандра образуют полную ортогональную с весом $\sin\theta$ систему функций в гильбертовом пространстве $L_2^{(1)}[0,\pi]$, при этом для всех θ на сегменте $[0,\pi]$ полиномы ограничены $|P_n(\cos\theta)|\le 1$ и квадрат нормы полиномов убывает до нуля с ростом n и равен: $2/(2n+1)$, $n\ge 0$. Функции Бесселя первого рода $j_n(kr)$ обеспечивают ограниченность полных потенциалов в окрестности начала системы координат, а функции Ханкеля первого рода $h_n^{(1)}(kr)$ обеспечивают выполнение условия требуемого затухания звука на бесконечности. Функции Бесселя ортогональны с весом r в гильбертовом пространстве $L_2(0,\infty)$.

С целью отыскания коэффициентов C_n для (3) используем граничные условия. Из них сначала получаем систему вспомогательных парных функциональных уравнений, которые содержат все коэффициенты рядов из (3). Исключим из этой системы коэффициенты A_n, B_n, $n\ge 0$, потенциалов U_1, U_2 (3). Для этого выразим коэффициенты A_n, B_n через коэффициенты C_n и подставим эти коэффициенты A_n, B_n во вспомогательные функциональные уравнения. После некоторых преобразований и, используя значение определителя Вронского для функций $j_n(ka_0)$ и $h_n^{(1)}(ka_0)$, получаем в результате требуемую систему функциональных уравнений относительно искомых коэффициентов C_n потенциала U_3 (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left\{C_n\frac{h_n^{(1)}(ka_1)}{\Delta_n}+\frac{j_n(ka_0)}{\Delta_n}\right\}P_n(\cos\theta)=0,\qquad \theta_0<\theta\le\pi, \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left\{C_n[h_n^{(1)}(ka_1)]'+[j_n(ka_1)]'\right\}P_n(\cos\theta=0,\qquad 0\le\theta<\theta_0, \tag{5}$$

где

$$\Delta_n=h_n^{(1)}(ka_0)[j_n(ka_1)]'-j_n(ka_0)[h_n^{(1)}(ka_1)]'. \tag{6}$$

Система (4), (5) имеет единственное решение. Уравнения системы имеют сложное ядро, содержащее полиномы Лежандра и функции Бесселя. Для решения системы (4), (5) не эффективны прямые численные методы, так как ряды в функциональных уравнениях системы имеют существенно разную скорость сходимости при $n\to\infty$ на частичных интервалах из $[0,\pi]$. Общего эффективного метода решения таких систем пока нет. Применим метод полуобращения матричного оператора для решения системы (4),(5) рассматриваемой задачи [7-12]. В результате получим эффективно разрешимую систему линейных алгебраических уравнений второго рода.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Приведём систему парных функциональных уравнений (4), (5) сначала к виду, удобному для применения метода частичного обращения матричного оператора задачи. Операторное уравнение, соответствующее системе (4), (5), является уравнением первого рода вида $AX=B$ в пространстве $L_2[0,\pi]$. В $L_2[0,\pi]$ представим оператор A как сумму двух операторов $A=A^{(1)}+A^{(2)}$, из которых оператор $A^{(1)}$ имеет обратный $(A^{(1)})^{-1}$, произведение операторов $(A^{(1)})^{-1} * A^{(2)}$ есть компактный оператор, и произведение операторов $(A^{(1)})^{-1} * B$ является ограниченным в $L_2[0,\pi]$. На первом шаге преобразования системы вводим обозначение $\tilde{C}_n$ вместо коэффициентов C_n из (3):

$$\tilde{C}_n = F_n\left[C_n h_n^{(1)}(ka_0) + j_n(ka_0)\right] / \Delta_n, \tag{7}$$

где величина (определитель) Δ_n введён в (6). Теперь применим для полиномов Лежандра интегральные представления Мелера-Дирихле и связь полиномов с их производными, следуя [13]. Подставляя эти представления вместо полиномов Лежандра в оба уравнения (4), (5), приходим к однородным интегральным уравнениям Вольтерра I рода (типа Абеля) следующего вида:

$$\int_0^\theta \frac{f(x)dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}} = 0,\ \theta \in [0,\theta_0);\quad \int_\theta^\pi \frac{g(x)dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}} = 0,\ \theta \in (\theta_0,\pi]\,. \tag{8}$$

Каждое из интегральных уравнений в (8) имеют единственное тривиальное решение, которое является тригонометрическим рядом для функции из $L_2[0,\pi]$. Спектр интегральных операторов для (8) имеет единственную предельную точку. Решение для (8) отыскивается с помощью обратного интегрального преобразования типа Абеля [5-13]. Этим переходим от функциональных уравнений первого рода по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ к уравнениям (и к рядам) по тригонометрическим функциям $\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]$ и $\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]$. Затем, одно из функциональных уравнений интегрируем по переменной θ и показываем, что константа интегрирования равна нулю. С помощью введения в функциональные уравнения параметра малости

$$\varepsilon_n^{(1)} = 1 + 4i(ka_1)^3 \frac{\Delta_n}{2n+1} \frac{[h_n^{(1)}(ka_1)]'}{h_n^{(1)}(ka_0)} \tag{9}$$

выделим главную обращаемую часть $A^{(1)}$ этих уравнений. Затем выполним обращение главной части уравнений $A^{(1)}$, т.е. выполним обращение тригонометрических рядов методом, близким к методу задачи Римана-Гильберта [7-15], используя при этом полноту и ортогональность функций $\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]$, $n = 0,1,2,\ldots$, $\theta \in [0,\pi]$. В результате получаем требуемую систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$\tilde{C}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_n \varepsilon_m^{(1)} \beta_{nm}(\theta_0) + \sum_{m=0}^{\infty} F_m^{(1)} \beta_{nm}(\theta_0)\,. \tag{10}$$

Здесь, для системы (10) коэффициенты $\tilde{C}_n$ введены в (7), а величины $\beta_{nm}(\theta_0)$ и $F_m^{(1)}$ таковы:

$$\beta_{nm}(\theta_0) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin[(m-n)\theta_0]}{m-n} - \frac{\sin[(m+n+1)\theta_0]}{m+n+1}\right\},\quad n \neq m, \tag{11a}$$

$$\beta_{mm}(\theta_0) = \frac{1}{\pi}\left\{\theta_0 - \frac{\sin[(2n+1)\theta_0]}{2n+1}\right\},\quad n = m = 0,1,2,\ldots \tag{11b}$$

$$F_m^{(1)} = -F_m 4i(ka_1)^3 \frac{j_m(ka_0)}{2m+1}\left\{\frac{[h_m^{(1)}(ka_1)]'}{h_m^{(1)}(ka_0)} - \frac{1}{\Delta_m}\right\}. \tag{12}$$

Отметим, что для (12) коэффициенты F_m определены в (2а), а Δ_m - в (6).

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ

1). В правой части системы линейных алгебраических уравнений (10) матричный оператор является компактным в гильбертовом пространстве комплексных числовых последовательностей $\tilde{l}_2$ [14,15]. Норма оператора является ограниченной в $\tilde{l}_2$. Спектр оператора не содержит единицы. Это следует, в частности из следующих асимптотических оценок параметра малости ε_n (9) и оценок величин $\beta_{nm}(\theta_0)$ (11а),(11в):

$$\varepsilon_n^{(1)} = O(n^{-2}), \quad n \to \infty; \quad 0 \le \left|\beta_{nm}(\theta_0)\right| \le (2\theta_0\pi^{-1}) \le 2, \; n,m \ge 0. \qquad (13)$$

Ряд $\sum_{m=0}^{\infty} F_m^{(1)}\beta_{nm}(\theta_0)$ в правом столбце системы (10) [где $F_m^{(1)}$ определён в (12)] сходится равномерно для любых значений $\theta_0 \in [0,\pi]$ и для любых фиксированных значений ka_0, ka_1, весь правый столбец системы (10) принадлежит гильбертовому пространству $\tilde{l}_2$. Для системы (10) справедлива альтернатива Гильберта. Система имеет единственное решение. Система разрешима численно для любых параметров задачи, например, методом редукции. Для ускорения метода редукции в системе (10) целесообразно ввести новое обозначение $\tilde{C}_n^{(1)} = \tilde{C}_n/(n+1), \quad n \ge 0$. При этом находим, что метод редукции обладает высокой скоростью сходимости, пропорциональной $N^{-3/2}$, где N - порядок редукции, $N \to \infty$ Для предельных значений параметров задачи, в частности для $0 \le ka_0 < ka_1 < 1$, $0 \le \theta_0 < 1$, находим, что норма в $\tilde{l}_2$ матричного оператора система (10) меньше 1 и система разрешима аналитически, например, методом последовательных приближений (МПП).

Система уравнений (10) построена для отыскания коэффициентов C_n вторичного потенциала скоростей U_3 (3) вне сферического сегмента. Для изучения полного потенциалов скоростей в области между сферическим сегментом и шаром необходимо использовать суперпозицию потенциалов U_1 и U_2 (3), для которых коэффициенты A_n, B_n находим, зная коэффициенты C_n [из системы(10)], по пересчётным формулам. Так, для коэффициентов A_n формулы таковы:

$$A_n = -j_n(ka_0)\left\{C_n[h_n^{(1)}(ka_0)]' + [j_n(ka_0)]'\right\}/\Delta_n, \; n \ge 0.$$

2). Рассмотрим некоторые варианты постановок исходной задачи. Первым (тестовым) вариантом рассмотрим случай, когда экранирующий сферический сегмент исчезает, и мы приходим к задаче дифракции акустической волны на мягком (замкнутом) шаре. В этом случае в системе (10) угол θ_0 берём малым $(\theta_0 < 1)$ и решаем приближённо систему (10). Рассмотрим сечение рассеяния σ плоской волны на мягком шаре с малым экранирующим сегментом. В сечении рассеяния выполним предельный переход для $\theta_0 \to 0$. При этом получаем, что сечение рассеяния экранированной мягкой сферы стремится к известному результату $\sigma = 4\pi(ka_0)^2(1-(ka_0)^2/3) + O((ka_0)^6)$ [4] для замкнутой сферы без экрана. В этом случае для потенциала U_1 коэффициенты A_n, как известно, таковы: $A_n = j_n(ka_0)/h_n^{(1)}(ka_0)$, а для потенциалов U_2 и U_3 (3) коэффициенты $B_n = C_n = 0$.

3). Теперь выполним предельный переход к варианту постановки задачи, когда у внешнего экранирующего сегмента угол раскрыва θ_0 увеличивается до максимального $(\theta_0 \to \pi)$ и сегмент превращается в замкнутую (жёсткую) сферу. Для аналитического решения системы (10) для больших значений θ_0 необходимо переобозначить θ_0 на θ_1 так $\theta_0 = \pi - \theta_1$ и выбрать θ_1 из полуинтервала $[0;1)$. При этом необходимо выделить главную диагональ матрицы системы (10) и ввести обозначения для новых коэффициентов системы (10) так $C_n^{(1)} = (-1)^n C_n$. Найдя приближённое решение новой системы (10) при $\theta_1 \to 0$, получаем, что для потенциала U_3 (3) искомые коэффициенты $C_n \to [j_n(ka)]'/[h_n^{(1)}(ka)]'$, а для потенциалов U_1, U_2 коэффициенты $A_n, B_n \to 0$, $n \ge 0$.

4). Рассмотрим такой вариант постановки задачи. Пусть внутренний шар исчезает, для него положим $ka_0 \to 0$. Тогда приходим к задаче рассеяния звуковой волны на одной жёсткой сфере с круговым отверстием, измеряемым величиной $\pi - \theta_0$. Тогда, выполнив предельный переход в системе (10), находим, что искомые коэффициенты $C_n^{(0)}$ для потенциала U_3 (3) являются решением следующей системы линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$C_n^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(0)} \varepsilon_m^{(2)} \frac{m+1}{n+1} \beta_{nm}(\theta_0) - 4i(ka_1)^3 \sum_{m=0}^{\infty} F_m \frac{[j_m(ka_1)]'}{2m+1} \beta_{nm}(\theta_0)/(n+1), \quad (14)$$

где

$$C_n^{(0)} = \frac{C_n F_n}{(n+1)[j_n(ka_1)]'}, \quad \varepsilon_m^{(2)} = 1 + 4i \frac{(ka_1)^3}{2m+1} [h_m^{(1)}(ka_1)][j_m(ka_1)]'. \quad (14a)$$

В системе (14) параметр малости $\varepsilon_m^{(2)}$ (14а) имеет такую же асимптотическую оценку для $m \to \infty$, как и параметр ε_m (9), (13). Матричный оператор системы (14) является вполне непрерывным. Резонансные частоты вынужденных колебаний для жёсткой сферы с отверстием есть корни дисперсионного уравнения, получаемого из уравнения (14). Эти корни следует находить, рассматривая в качестве нулевого приближения (при малых отверстиях в сфере $(\pi - \theta_0) < 1$), корни уравнения $[j_n(ka_1)]' = 0$. Это уравнение является дисперсионным уравнением для предельного варианта постановки задач, когда рассматриваем вынужденные колебания (одной) замкнутой жёсткой сферы. Корни этого уравнения сравнительно хорошо изучены [16]. Вместе с тем новые акустические задачи, в частности, задачи гелиоакустики требуют изучения сравнительно высоких резонансных частот. Так, для фиксированных больших значений n и m корни $x_{n,m}$ уравнения $[j_n(ka_1)]' = 0$ находим приближённо; некоторые из них даны в табл. 1. Эти корни сначала вычисляем по различным асимптотическим формулам, а затем уточняем численно.

Табл. 1. Корни $x_{n,m}$ уравнения $[j_n(ka_1)]' = 0$. Асимптотика.

m \ n	20	40	70	100	150
15	74.1022	100.0650	136.9815	172.6741	230.8349
25	106.3953	133.6070	172.2902	209.4854	269.6086

Отметим, что для открытой области (основной задачи), заключённой между двумя сферическими поверхностями (жёсткой и мягкой) радиусов a_0 и a_1, нулевыми приближениями к резонансным частотам вынужденных колебаний являются корни (дисперсионного) уравнения $\Delta_n = 0$ (6). При этом учтём, что величина Δ_n лишь в предельном случае при $a_0 \to a_1$ совпадает с постоянным значением $i(ka_1)^{-2}$ определителя Вронского функций $j_n(ka_1)$, $h_n^{(1)}(ka_1)$ для любого $n \geq 0$ и $ka_1 \neq 0$. Прорезание отверстия в замкнутой сфере приводит к частичному прореживанию вырожденного спектра собственных колебаний замкнутой сферы. В предельном случае малых отверстий во внешней сфере, для аналитического решения дисперсионного уравнения [соответствующего (10)], применяем метод Ньютона. Получаем: резонансные частоты $x_{n,m}$ вынужденных колебаний открытой области немонотонно изменяются, начиная с резонансных частот $x_{n,m}^{(0)}$ замкнутой области, пропорционально третьей степени величины отверстия в сфере, и получают комплексные добавки, в частности добавки к величинам $x_{n,m}$, вычисленными в табл. 1.

5). Отдельным особым есть вариант замкнутой сферы (шара), поверхность которой составлена из двух частей, разделённых бесконечно тонкой звуконепроницаемой перегородкой при $\theta = \theta_0$, $r = a_1$. Полагаем для $\theta \in [0, \theta_0)$ поверхность сферы жёсткой (как и в основной задаче), а для $\theta \in (\theta_0, \pi]$ полагаем поверхность сферы мягкой. Заметим, поскольку сфера замкнута, то можно предположить:

задача акустики имеет явное решение. Тем более, что коэффициенты $A_n^{(3)}$, $B_n^{(3)}$ сразу следует для U_1, U_2 (3) положить равными нулю. Однако, построение системы функциональных уравнений для поиска коэффициентов $C_n^{(3)}$ потенциала U_3 (3) сразу развеяло это предположение. Необходимо выполнить все шаги по регуляризации задачи. В частности, необходимо решить интегральное уравнение типа Абеля, ввести параметр малости $\varepsilon_m^{(3)}$ и выполнить переобозначения искомых коэффициентов

$C_n^{(4)}$ так: $$\varepsilon_m^{(3)} = 1 + i\frac{2(ka_1)}{(2m+1)}\frac{[h_m(ka_1)]'}{h_m^{(1)}(ka_1)}, \quad C_n^{(4)} = C_n^{(3)} F_n h_n^{(1)}(ka)/(n+1).$$

В итоге, для поиска коэффициентов $C_n^{(4)}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным матричным оператором, которая отличается от (10) и такова (в ней величина $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера):

$$C_n^{(4)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(4)} \varepsilon_m^{(3)} \frac{m+1}{n+1} \beta_{nm}(\theta_0) - \sum_{m=0}^{\infty} F_m [j_m(ka_1)]' [\pi\delta_{nm} - \beta_{nm}(\theta_0)]/(n+1) .$$

ВЫВОДЫ

Построена система линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным матричным оператором (10) для решения задачи акустической дифракции плоской волны на жёсткой сфере с отверстием (сегменте) и с нагрузкой в виде мягкого шара. Построенный алгоритм особенно эффективен для анализа задачи в резонансной области частот. Вместе с тем, он применим и для анализа задачи в высокочастотной области. Вычислены некоторые сечение рассеяния и резонансные частоты для предельных значений параметров задачи. В работе рассмотрены несколько вариантов постановки и решения задач, каждый имеет самостоятельный интерес. Построенные алгоритмы перспективны для дальнейшей регуляризации рассматриваемых задач и для анализа более сложных задач на сферических и иных структурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. – Л.: -Судостроение. -1989. –302 с.
2. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно – аналитические методы исследования волновых процессов. –Киев: -Наукова .Думка. –2001. – 452 с.
3. Скучик Е. Основы акустики. Т.2. - М.: - Мир, - 1976. - 542 с.
4. Thomas D.P. Diffraction by a spherical cap. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1963, 59, с.197-209.
5. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, в.10-11. - С. 1193-1206.
6. Морс Ф.М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. - М.: - ИЛ, - 1960. - 493 с.
7. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
8. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.
9. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8, в.10-11. - С. 4-78.
10. Свищёв Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. // ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т.12. - С. 56-60.
11. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А. Расчёт потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом. // Радиотехника.-Изд. ХГУ - 1990. - Т.89. - С. 130-134.
12. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. // Электромагнитные волны и электронные системы. - 2005. - Т.10, в.8. - С. 3-15.
13. Бейтмен Г. , Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. - М.: - Наука, - 1974. - 295 с.
14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения -Киев: -Наукова Думка,- 1977. -362 с.
15. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. -368 с.
16. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. - М.:-ФМЛ, - 1979. -832 с.