

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ ПУТЕМ АНАЛИЗА КАРТ ФОТОННОЙ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

И. В. Гурьев

Лаб. «Фотоника», Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, пр. Ленина, 14
e-mail: i.guryev@kture.kharkov.ua

Поступила в редакцию 20 апреля 2009 г.

В работе получены карты фотонной плотности состояний двумерного фотонного кристалла методом разложения по плоским волнам по аналогии с картами фотонных запрещенных зон. Карты фотонной плотности состояний позволяют более точно определять параметры фотонных кристаллов при проектировании устройства на их основе. Кроме того, произведено сравнение карт с аналогичными характеристиками, полученными при помощи метода конечных разностей. Результаты сравнения показывают, что данные полученные двумя способами аналогичны, однако получение карт фотонной плотности состояний требует в несколько раз меньше времени для расчета при одинаковой точности. Кроме того, проведено сравнение эффективности методов анализа карт фотонной запрещенной зоны и карт фотонной плотности состояний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фотонный кристалл, фотонная плотность состояний, спектр пропускания, метод разложения по плоским волнам, метод конечных разностей

У роботі отримано карти фотонної щільності станів двовимірного фотонного кристалу методом розкладання за плоскими хвилями за аналогією з картами фотонних заборонених зон. Карти фотонної щільності станів дозволяють точніше визначати параметри фотонних кристалів під час проектування пристроїв на їх основі. Крім того, було проведено порівняння карт із аналогічними характеристиками, що отримані за допомогою метода кінцевих різниць. Результати порівняння вказують на аналогію даних, що отримані двома методами, однак розрахунок карт фотонної щільності станів потребує у декілька разів менше часу при однаковій точності. Також проведено порівняння ефективності методів аналізу карт фотонної забороненої зони та карт фотонної щільності станів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фотонний кристал, фотонна щільність станів, спектр пропускання, метод розкладання за плоскими хвилями, метод кінцевих різниць

In the work, there have been computed the photonic density of states maps of the 2D photonic crystal by means of plane waves expansion method by the analogy with photonic band gap maps. The photonic density of states maps allows precise determination of the parameters of photonic crystals during the design process of the photonic crystal-based device. Moreover, there have been carried out the comparison with analogous characteristics obtained by the finite differences time domain method. Comparison results indicate the similarity of results obtained by two methods, however, the computation of photonic density of states maps requires much less time at the same computation precision. Moreover, in the work there have been carried out the comparison between the efficiencies of the photonic density of states maps and the photonic band gap maps analysis methods.

KEYWORDS: photonic crystal, photonic density of states, transmittance spectrum, plane wave expansion method, finite differences method

В настоящее время фотонные кристаллы (ФК) находят широкое применение в устройствах телекоммуникации и лазерной техники, таких как микроструктурные волокна [1], резонаторы лазеров [2], пассивные элементы, такие как высокоэффективные волноводы [3], волноводные изгибы [4] и мультиплексоры по длине волны [5]. Одним из ключевых моментов на стадии разработки является быстрый и точный выбор параметров элементов ФК. Одним из возможных путей получения параметров является анализ карт полных фотонных запрещенных зон (ФЗЗ). Карты ФЗЗ представляют собой так называемые приведенные зонные структуры ФК, которые предоставляют информацию о полных ФЗЗ для различных значений параметров ФК. Такие карты ФЗЗ были предложены Янопулосом [6], а их применение для проектирования демultipлексоров по длине волны было показано в работе [7]. Однако карты ФЗЗ предоставляют неполную информацию о передаточных характеристиках ФК, поскольку содержат данные только о полных ФЗЗ и не описывают поведение ФК вне ФЗЗ.

В данной работе предложен метод проектирования устройств на основе ФК при использовании карт фотонной плотности состояний (ФПС) вместо карт ФЗЗ для получения параметров ФК. Такие карты представляют собой ФПС, полученные для ряда значений параметров ФК и содержат полную информацию о коэффициенте пропускания ФК конечных размеров.

В работе показан метод получения карты ФПС, основанный на методе разложения по плоским волнам. Кроме того, методом конечных разностей получены карты коэффициентов пропускания для ФК конечных размеров. Показано полное соответствие карт ФПС и карт коэффициентов пропускания. Также в работе проведен сравнительный анализ эффективности методов проектирования при использовании

карт ФЗЗ и карт ФПС на примере расчета параметров демультимплексора по длине волны для сверхкоротких импульсов.

РАСЧЕТ ФОТОННОЙ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ФК

ФПС рассчитывают исходя из зонной структуры ФК [8]. Зонную структуру получают путем решения задачи на собственные значения для стационарного уравнения Гельмгольца:

$$-\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(\vec{r}_{\parallel})} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon(\vec{r}_{\parallel})} \frac{\partial}{\partial y} \right\} H_z(\vec{r}_{\parallel}) = \frac{\omega^2}{c^2} H_z(\vec{r}_{\parallel}), \quad (1)$$

где x и y – координаты в плоскости ФК, \vec{r}_{\parallel} радиус-вектор в плоскости ФК, $\varepsilon(\vec{r}_{\parallel})$ – двумерная функция распределения диэлектрической проницаемости ФК, ω – частота излучения, c – скорость света в вакууме, $H_z(\vec{r}_{\parallel})$ – волновая функция.

Наиболее распространенным методом для решения таких задач является метод разложения по плоским волнам. Он заключается в решении задачи на собственные значения для уравнения Гельмгольца для бесконечной, строго периодической структуры путем представления волновых функций согласно теореме Блоха-Флоке в виде произведения плоской волны на периодическую функцию с периодом решетки:

$$\vec{H}(\vec{r}_{\parallel}) = \vec{H}_{\vec{k}_{\parallel n}}(\vec{r}_{\parallel}) = \vec{H}'_{\vec{k}_{\parallel n}}(\vec{r}_{\parallel}) \cdot e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}}, \quad (2)$$

где $\vec{H}'_{\vec{k}_{\parallel n}}(\vec{r}_{\parallel})$ – периодическая функция с периодом решетки, \vec{k}_{\parallel} – волновой вектор, n – номер собственного состояния.

Ввиду периодичности функции, удобно представить ее, а также обратную функцию распределения диэлектрической проницаемости в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \vec{H}'_{\vec{k}_{\parallel n}}(\vec{r}_{\parallel}) &= \sum_{\vec{G}_{\parallel}} H'_{\vec{k}_{\parallel n}}(\vec{G}_{\parallel}) \exp(i(\vec{k}_{\parallel} + \vec{G}_{\parallel}) \cdot \vec{r}_{\parallel}) \\ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r}_{\parallel})} &= \sum_{\vec{G}_{\parallel}} \chi(\vec{G}_{\parallel}) \cdot \exp(i\vec{G}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{G}_{\parallel} , – вектор обратной решетки в плоскости двумерного ФК, $\chi(\vec{G}_{\parallel})$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье обратной функции распределения диэлектрической проницаемости ФК.

Вследствие упрощения, которое заключается в ограничении бесконечного ряда Фурье, получают систему линейных уравнений, которая решается численным методом. Для случая двумерного фотонного кристалла система уравнений выглядит следующим образом [8]:

$$\sum_{\vec{G}_{\parallel}} \chi(\vec{G}_{\parallel} - \vec{G}_{\parallel}') (\vec{k}_{\parallel} + \vec{G}_{\parallel}) (\vec{k}_{\parallel} + \vec{G}_{\parallel}') H'_{z, \vec{k}_{\parallel n}}(\vec{G}_{\parallel}') = \frac{\omega_{\vec{k}_{\parallel n}}^{(H)2}}{c^2} H'_{z, \vec{k}_{\parallel n}}(\vec{G}_{\parallel}), \quad (4)$$

где $H'_{z, \vec{k}_{\parallel n}}(\vec{G}_{\parallel}')$ – волновые функции в представлении волновых векторов. Находя собственные значения матрицы, составленной из коэффициентов при волновой функции, получаем набор собственных частот ФК для некоторого значения волнового вектора.

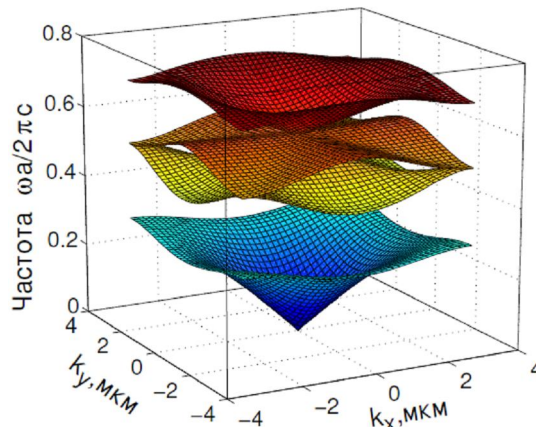


Рис. 1. Зонная структура ФК, рассчитанная для всех точек первой зоны Бриллюэна

Для расчета фотонной плотности состояний, необходимо получить множество собственных частот для каждого значения волнового вектора внутри первой зоны Бриллюэна (см. рис. 1). Для двумерного ФК зонная структура будет представлять собой набор поверхностей, соответствующих различным зонам ФК. Зонная структура, представленная в таком виде полностью описывает частотные свойства ФК и может служить основой для расчета ФПС.

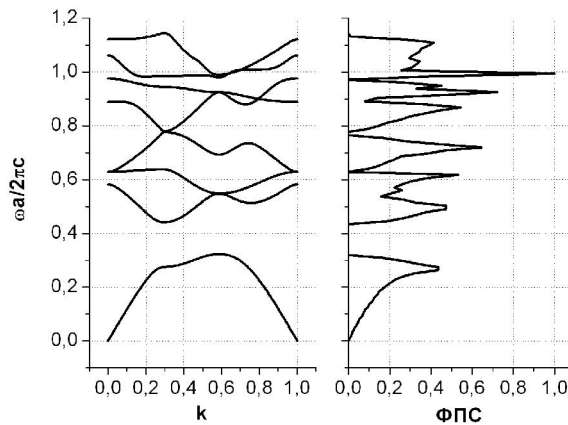


Рис. 2. Зонная структура ФК и соответствующая ей ФПС

Имея зонную структуру, соответствующую определенному типу ФК, можно найти ФПС как количество собственных состояний в малом промежутке частот. Таким образом, ФПС определяется путем «подсчета» всех разрешенных состояний, имеющих частоту ω [9]:

$$N(\omega) = \sum_n \int_{BZ} d^2k \delta(\omega - \omega_n(\vec{k})) \quad (5)$$

На рис. 2 показана зонная структура для точек высокой симметрии, рассчитанная методом разложения по плоским волнам для ФК, представляющего собой периодическую систему полупроводниковых стержней с показателем преломления $n=3.5$, разделенных воздушной средой, а

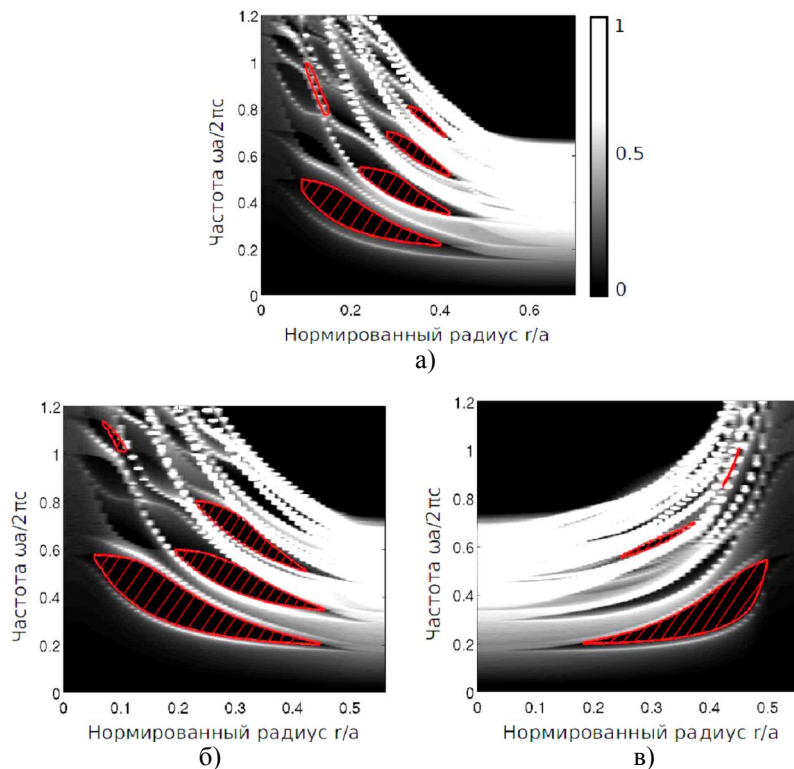


Рис. 3. Карты фотонной плотности состояний для ФК, представленного системой диэлектрических стержней в квадратной решетке с $n=3.5$ в воздухе (а), в шестиугольной решетке (б), а также отверстиями в шестиугольной решетке (в)

также его фотонная плотность состояний, рассчитанная по формуле (5). Сопоставляя графики, можно отметить, что нулевая или низкая плотность состояний соответствует ФЗЗ или малому количеству состояний в данной области частот. С другой стороны, пики плотности состояний приходятся на те области частот, где на зонной структуре образуются плато или плоские уровни, а также в областях, где количество уровней на единицу частот максимально.

На рис. 2 показана ФПС для одного из значений соотношения радиуса элементов ФК к расстоянию между их центрами (пичу). Однако, для решения задач проектирования устройств, для которых необходимо по заданным передаточным характеристикам получить параметры ФК, удобно использовать информацию о ФПС, рассчитанных для некоторого диапазона параметров – карту ФПС. В данной работе карта ФПС была рассчитана для значений соотношения радиуса элементов ФК к пичу, лежащих в пределах 0.1...0.4. Карты ФПС для конфигураций ФК с наиболее широкими ФЗЗ показан на рис. 3. Карты ФПС были рассчитаны для случая ТМ поляризации для структур стержней в воздухе, в то время как для структуры отверстий в материале расчет проводился для случая ТЕ поляризации. На рисунках наиболее светлые участки соответствуют высоким значениям ФПС, темно-серые участки соответствуют низкому значению ФПС. ФЗЗ представлены заштрихованными областями. Таким образом, из рисунка видно, что существуют области, значения ФПС в которых малы, но не равны нулю. Это означает, что на карте ФЗЗ данные области фигурировать не будут, что может привести к возникновению ошибки при проектировании устройств на основе ФК при использовании карт ФЗЗ.

Таким образом, для расчета фотонной плотности состояний был использован метод разложения по плоским волнам. Расчет карты проводился с шагом изменения соотношения радиуса элемента ФК к пичу равным 0.002 и в пределах изменения этой величины от 0.1 до 0.4. При этом, время проведения расчетов на ЭВМ с процессором Intel Pentium 2.7 GHz составило 7 часов.

РАСЧЕТ КАРТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОПУСКАНИЯ

Для того, чтобы доказать применимость использования карт фотонной плотности состояний для проектирования устройств на основе ФК, в работе было проведено сравнение карты плотности состояний ФК и карты коэффициента пропускания ФК конечных размеров. Для расчета карты коэффициентов пропускания в работе был использован метод конечных разностей во временных интервалах (МКР). Метод заключается в дискретизации уравнений Максвелла. При этом дифференциальные операторы заменяют на разности и для двумерного случая для ТМ поляризации получают систему уравнений:

$$\begin{aligned} H_{x(i,j)}^{n+1/2} &= H_{x(i,j)}^{n-1/2} - \frac{c\Delta t}{\mu\Delta y} (E_{z(i,j)}^n - E_{z(i,j-1)}^n) \\ H_{y(i,j)}^{n+1/2} &= H_{y(i,j)}^{n-1/2} + \frac{c\Delta t}{\mu\Delta x} (E_{z(i,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n) \\ E_{z(i,j)}^{n+1} &= E_{z(i,j)}^n + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta x} (H_{y(i+1,j)}^{n+1/2} - H_{y(i,j)}^{n+1/2}) - \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta y} (H_{x(i,j+1)}^{n+1/2} - H_{x(i,j)}^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (6)$$

где $H_{x(i,j)}^n$, $H_{y(i,j)}^n$ и $E_{z(i,j)}^n$ - компоненты поля в узлах расчетной сетки, Δt - временной шаг, Δx , Δy - размеры элементов расчетной сетки, ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Система была решена, задавая начальные и граничные условия. В качестве начальных условий в работе использовался периодический сигнал, подаваемый на одну из границ расчетной области. В поперечном сечении сигнал имеет вид Гауссовой функции с максимумом в середине расчетной области. В качестве граничных условий в данной работе были использованы поглощающие граничные условия и согласованный поглощающий слой [10], в области которого искусственно вводится высокое затухание излучения. Для ТМ поляризации компоненту поля E_z искусственно разделяют на составляющие E_{zx} и E_{zy} . Таким образом, получаем систему из 4 уравнений в терминах конечных разностей:

$$\begin{aligned} H_{x(i,j)}^{n+1/2} &= H_{x(i,j)}^{n-1/2} + \frac{c\Delta t}{\mu} \left(-\frac{1}{\Delta y} (E_{z(i,j)}^n - E_{z(i,j-1)}^n) - \sigma_y^* H_{x(i,j)}^{n-1/2} \right) \\ H_{y(i,j)}^{n+1/2} &= H_{y(i,j)}^{n-1/2} + \frac{c\Delta t}{\mu} \left(\frac{1}{\Delta x} (E_{z(i,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n) - \sigma_x^* H_{y(i,j)}^{n-1/2} \right) \\ E_{zx(i,j)}^{n+1} &= E_{zx(i,j)}^n + \frac{c\Delta t}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\Delta x} (H_{y(i+1,j)}^{n+1/2} - H_{y(i,j)}^{n+1/2}) - \sigma_x E_{zx(i,j)}^n \right) \\ E_{zy(i,j)}^{n+1} &= E_{zy(i,j)}^n + \frac{c\Delta t}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\Delta y} (H_{x(i,j+1)}^{n+1/2} - H_{x(i,j)}^{n+1/2}) - \sigma_y E_{zy(i,j)}^n \right) \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_x и σ_y - импедансы в направлениях x и y для электрической составляющей поля, а σ_y^* и σ_x^* - импедансы в направлениях x и y для магнитной составляющей поля.

Спектр пропускания был получен путем расчета распределение поля для каждой из длин волн диапазона. Рассчитывая спектр пропускания ФК для каждого из значений размера элемента ФК, получили карту коэффициентов пропускания.

Как и в случае карт ФПС, расчет карт коэффициентов пропускания также проводился для ФК, конфигурации которых предполагают наличие широких ФЗЗ. Результаты расчета карты коэффициентов пропускания для двух случаев показаны на рис. 4. Диапазон изменения величины соотношения радиуса стержней к пичу от 0 до 0.7 для ФК с квадратной решеткой и от 0 до 0.56 для ФК с шестиугольной решеткой. Диапазон выбран из тех соображений, что для указанных максимальных значений радиусов элементы ФК перекрываются и структуры становятся полностью однородными. На карте коэффициентов пропускания светлые области соответствуют высокому коэффициенту пропускания, темные области – низкому коэффициенту пропускания и черные заштрихованные области – отсутствию прохождения излучения через ФК конечных размеров. Сравнение полученных карт коэффициентов пропускания (рис. 4) и карт фотонных плотностей состояний (рис. 3) показывает их полное соответствие, то есть, высокая плотность состояний соответствует высокому коэффициенту пропускания, а полная ФЗЗ соответствует отсутствию прохождения излучения через ФК. С физической точки зрения это объясняется тем, что высокая плотность состояний соответствует большему количеству разрешенных волновых векторов излучения на данной длине волны, а, значит, большему значению потока излучения, проходящего через ФК.

Совпадение положений с низкими и высокими значениями на картах ФПС и картах коэффициента

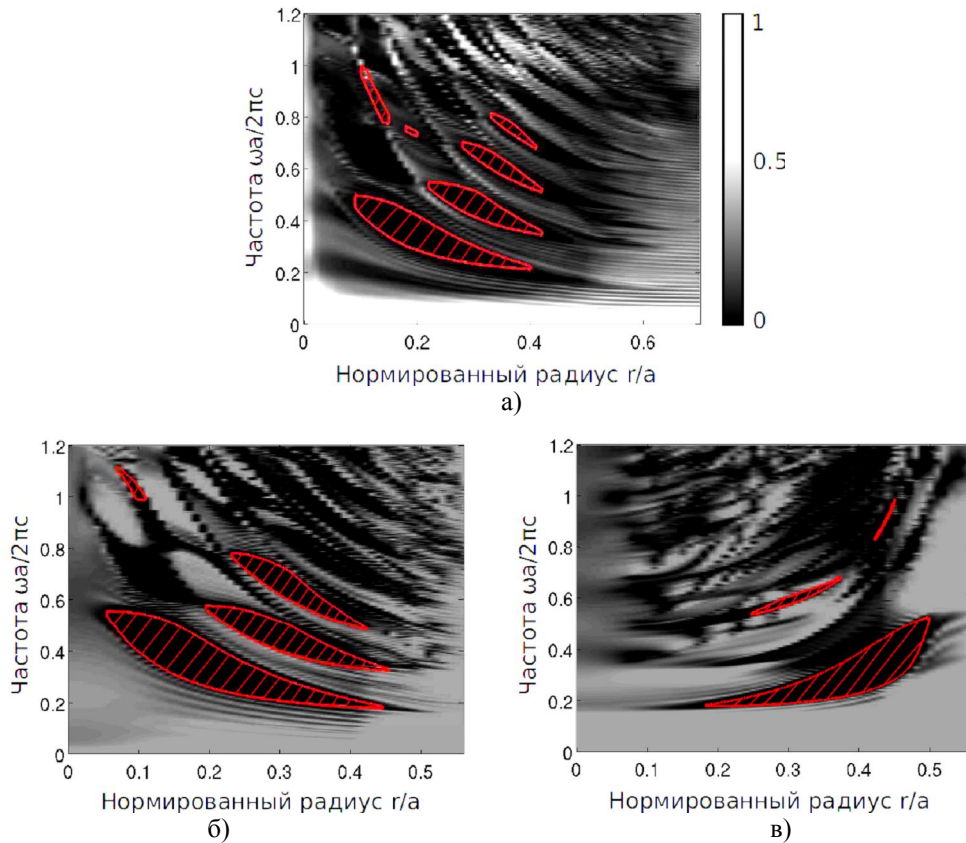


Рис. 4. Карты коэффициентов пропускания для ФК, представленного системой диэлектрических стержней в квадратной решетке с $n=3.5$ в воздухе (а), в шестиугольной решетке (б), а также отверстиями в шестиугольной решетке (в)

пропускания свидетельствует о том, что карты ФПС полностью описывают поведение коэффициента пропускания ФК. Более того, вследствие ограниченности машинных ресурсов дискретизация пространства для расчета карт коэффициентов пропускания методом конечных разностей была достаточно грубой, что привело к заметному ухудшению качества результатов. С другой стороны, при расчете карт ФПС существовала возможность более точной дискретизации пространства и характер изменения ФПС выражен более четко.

Несмотря на более низкую точность результатов, время проведения расчетов карт коэффициентов на ЭВМ с процессором Intel Pentium 2.7 GHz составило 120 часов. Такое существенное увеличение времени расчета по сравнению с расчетом карт фотонных запрещенных зон обусловлено тем фактом, что для

расчета спектра пропускания методом МКР, производится получение распределения поля для каждой из длин волн в каждый из моментов времени, начиная с момента ввода излучения в ФК. Соответственно, увеличение точности расчета существенно сказывается на времени выполнения задачи.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАРТ ФЗЗ И КАРТ ФПС

В работе [7] было показано применение карт ФЗЗ для проектирования демультиплексора по длине волны на основе двумерного ФК. Метод проектирования состоит в получении геометрических параметров элементов ФК, формирующего входной и выходные волноводные каналы, а также ФК,

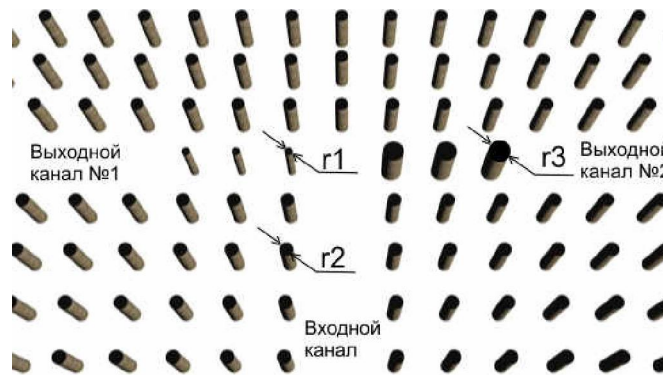


Рис. 5. Демультиплексор по длине волны для сверхкоротких импульсов на основе двумерного ФК

формирующих полосовые фильтры в выходных каналах. Схема выбора параметров путем анализа карт ФЗЗ показана на рис. 6а. При этом параметры ФК выбираются исходя из положения краев ФЗЗ. Считается, что вне ФЗЗ структура имеет равномерный коэффициент пропускания. При этом, r_1 соответствует радиусам элементов ФК, формирующего один из фильтров, r_2 – радиусам элементов ФК, формирующего волноводный канал, а r_3 соответствует радиусам элементов ФК, формирующего второй фильтр (рис. 5). Исходя из карты ФЗЗ, размеры фильтров демультиплексора подобраны таким образом, чтобы разделять широкополосные каналы с центральными длинами волн 1.31 мкм и 1.55 мкм.

На рис. 6б приведена карта ФПС и на ней отмечены частоты и геометрические размеры элементов, определенные путем анализа карты ФЗЗ. Из карты ФПС видно, что точка пересечения линии r_1 и линии ω_1 лежит не в максимуме ФПС, а значит, данная длины волн не соответствует максимуму спектра пропускания. Точка пересечения линии r_2 и линии ω_2 лежит в области локального максимума ФПС, а поэтому, одна из рабочих длин волн будет соответствовать максимуму коэффициента пропускания.

На рис. 7а показаны спектры пропускания фильтров в исследованном устройстве, полученные путем анализа карт ФЗЗ. Как и предполагалось, один из фильтров имеет низкий коэффициент пропускания в диапазонах длин волн, соответствующих ФЗЗ. Как показывают карты ФПС, повысить коэффициент

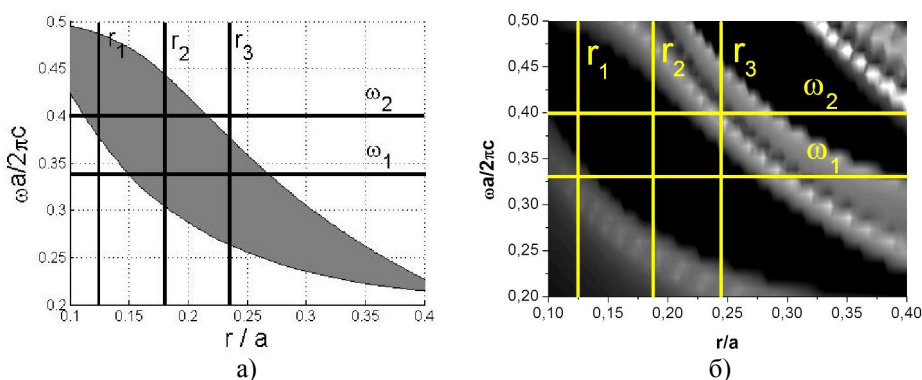


Рис. 6. Карта ФЗЗ (а) и карта ФПС (б) с примером выбора параметров элементов ФК

пропускания второго фильтра можно за счет уменьшения размера элементов соответствующего фильтра. На рис. 7б показан спектр пропускания для устройства с параметрами, полученными путем анализа карт ФПС. На рисунке явно видно существенное увеличение коэффициента пропускания фильтра на 1.55 мкм.

Таким образом, карты ФПС предоставляют более полную информацию о поведении излучения в периодической структуре по сравнению с картами ФЗЗ, поскольку описывают не только наличие ФЗЗ, но и позволяют описать поведение структуры вне ФЗЗ, а, следовательно, являются более предпочтительными для проектирования устройств на основе ФК.

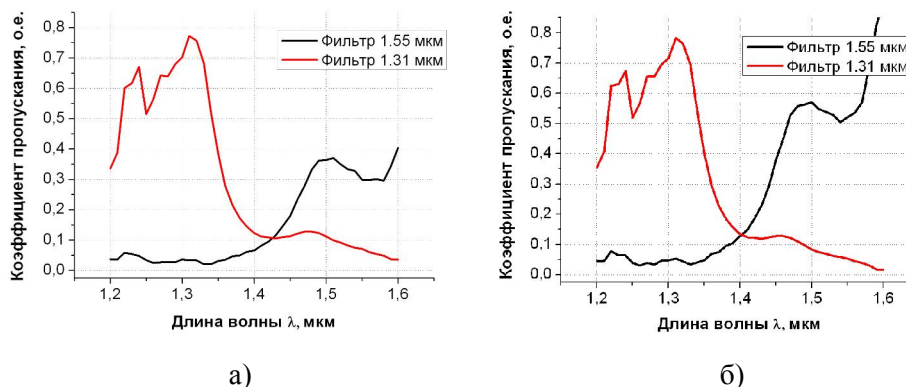


Рис. 7. Спектры пропускания фильтров, полученных путем анализа карт ФЗЗ (а) и карт ФПС (б)

ВЫВОДЫ

В работе было проведено сопоставление карт фотонной плотности состояний и карт коэффициента прохождения с точки зрения применимости к проектированию устройств на основе фотонных кристаллов. Результаты сопоставления показали полное соответствие формы фотонной плотности состояний и спектра отражения. Экстремумы пропускания на карте коэффициентов пропускания соответствуют экстремумам плотности состояний на картах ФПС как по положению на картах, так и по их величинам. При этом время расчета карты фотонной плотности состояний с аналогичной точностью в 17 раз меньше.

Таким образом, использование карт фотонной плотности состояний для проектирования устройств на основе ФК является более эффективным, чем использование карт фотонных запрещенных зон, поскольку предоставляют информацию о спектральных свойствах ФК в областях вне полной фотонной запрещенной зоны. С другой стороны, они являются более эффективными, чем карты коэффициентов пропускания, поскольку требуют значительно меньшее время для расчета, но предоставляют аналогичную информацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russell, Endlessly single-mode photonic crystal fiber // OPTICS LETTERS. - 1997. - т. 22, № 13. - С 961-963.
2. S. G. Romanov, D. N. Chigrin, V. G. Solovyev, T. Maka, N. Gaponik, A. Eychmüller, A. L. Rogach, and C. M. Sotomayor Torres, Light emission in a directional photonic bandgap // phys. stat. sol. (a). – 2003. – т.197, № 3. – С 662– 672.
3. S. Y. Lin, E. Chow, S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos, Demonstration of highly efficient waveguiding in a photonic crystal slab at the 1.5- μm wavelength// OPTICS LETTERS. – 2000. - т. 25, № 17. - С 1297-1299.
4. Peter Bienstman, Solomon Assefa, Steven G. Johnson and John D. Joannopoulos, Gale S. Petrich and Leslie A. Kolodziejski, Taper structures for coupling into photonic crystal slab waveguides // J. Opt. Soc. Am. B. - т. 20, № 9. – С 1817-1821.
5. Bong-Shik Song, Takashi Asano, Yoshihiro Akahane, Yoshinori Tanaka, and Susumu Noda, Multichannel Add/Drop Filter Based on In-Plane Hetero Photonic Crystals // JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY. – 2005. - т. 23, № 3. - С 1449-1455 (2005).
6. J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Molding the Flow of Light*. - Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995.
7. I. A. Sukhoivanov, I. V. Guryev, O. V. Shulika, A. V. Kublyk, O. V. Mashoshina, E. Alvarado-Méndez, J. A. Andrade-Lucio, Design of the photonic crystal demultiplexers for ultra-short optical pulses using the gap-maps analysis // Journal of Optoelectronics and Advanced Materials. – 2006. - т. 8, № 4. – С 1626-1630.
8. K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*. - Springer-Verlag, 2001.
9. Kurt Busch, Meikel Frank, Antonio Garcia-Martin, Daniel Hermann, Sergei F. Mingaleev, Matthias Schillinger, and Lasha Tkeshelashvili, A solid state theoretical approach to the optical properties of photonic crystals // phys. stat. sol. (a). – 2003. – т.197, №3. – С 637–647.
10. Jean-Pierre Berenger Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves // Journal Of Computational Physics. -1996. – т.127. - С 363–379.