

УДК 621.396

ВОЗБУЖДЕНИЕ ТОЧЕЧНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ КОНУСА С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

А.В. Артюх, В.А. Дорошенко, Ю.Д. Шимук

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, пр. Ленина 14, 61166

Поступила в редакцию 12 мая 2009 г

В работе проведено исследование задачи возбуждения импульсным радиальным источником полубесконечного идеально проводящего конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Решение корректно поставленной строгой начально-краевой электродинамической задачи проводится с помощью аналитико-численного метода, основанного на применении аппарата функций Грина и интегрального преобразования Мелера-Фока. Показана эквивалентность исходной электродинамической задачи задаче решения систем линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа. Получены аналитические представления для решения и приведены кривые зависимости поля от углов раскрытия конуса и угловой ширины щели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: импульсный источник, конус, продольные щели, аналитическое решение, численное решение.

В роботі проведено дослідження задачі збудження імпульсним радіальним джерелом напівнескінченного ідеально провідного конуса із періодично прорізаними вздовж утворюючих щілинами. Розв'язання коректно поставленої початково-крайової електродинамічної задачі проводиться за допомогою аналітико-чисельного метода, який базується на використанні апарата функцій Гріна та інтегрального перетворення Мелера-Фока. Показано, що вихідна електродинамічна задача еквівалентна задачі про розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду фредгольмівського типу. Отримано аналітичні розв'язки і наведено криві залежностей поля від кутів розкриття конуса і кутової ширини щілини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: імпульсне джерело, конус, повздовжні щілини, аналітичний розв'язок, чисельний розв'язок.

In this work the excitation of a semi-infinite perfectly conducting cone with periodic longitudinal slots by an impulse radial source problem is investigated. The solution of the well-posed initial-boundary problem is found using an analytically numerical method based upon Green function and Meler-Fock integral transforms applying. It is shown that the original electrodynamic problem is equivalent to the one of the Fredholm linear algebraic equations system of the second kind solving. Analytical view of the solution is derived and the graphs illustrating the field dependence on the aperture angle and angle slot width are presented.

KEY WORDS: impulse source, cone, longitudinal slots, analytical solution, numerical solution.

В последнее время значительно повысился интерес к математическому моделированию физических процессов, связанных с нестационарным рассеянием электромагнитных волн на сложных объектах, которые широко используются в радиофизических и радиотехнических устройствах и системах [1-3]. Современные математические методы исследования задач нестационарного рассеяния для поверхностей со сложной геометрией базируются в основном на численном методе FDTD [2], а также традиционном методе с привлечением преобразования Фурье и процедурой его обращения. Трудности применения метода FDTD к решению внешних электродинамических задач сопряжены с выполнимостью условий на бесконечности, в связи с чем зачастую предлагаются и используются поглощающие условия [3,4]. Наличие на рассеивающих телах вершин и кромок (клинья, конусы, щелевые структуры) значительно затрудняет и нередко делает невозможным реализацию алгоритмов на основе численных методов. Целью данной работы является решение модельной нестационарной задачи рассеяния поля точечного источника на конусе с продольными щелями с помощью строгого аналитико-численного метода, использование которого не предполагает введения поглощающих условий и использования процедуры обращения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Точечный импульсный источник электромагнитного поля возбуждает полубесконечный круговой тонкий идеально проводящий конус Σ с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями. Угловая ширина щелей d и период конической структуры $l = 2\pi/N$ равны величинам двугранных углов, образованных плоскостями, которые проходят через ось конуса и ребра соседних лент. Наличие конической поверхности вносит в поле источника возмущение, которое и требуется определить.

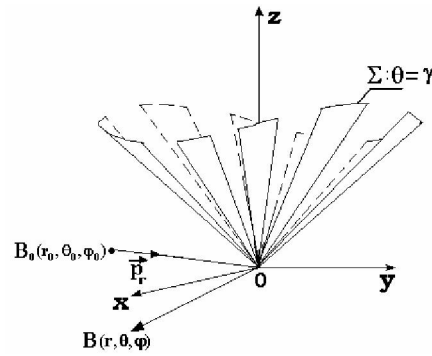


Рис. 1. – Одиночный конус с продольными щелями

Для удобства решения этой электродинамической задачи введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в вершине конуса, в которой конус Σ задается уравнением $\theta = \gamma$ (см. рис.1). Для определенности возьмем в качестве источника электромагнитного поля электрический ($\chi = 1$) или магнитный ($\chi = 2$) радиальный диполь с моментом

$$\vec{P}^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \vec{M}^{(\chi)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0)$$

и расположенный в точке $B(\vec{r}_0)$, где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ - дельта-функция, а $f(t - t_0)$ определяет зависимость поля источника от времени, причем $f(t - t_0) \equiv 0, t < t_0$ (источник включается в момент времени $t = t_0$). Среда, в которую помещены коническая поверхность и источник, является однородной, изотропной и стационарной с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ . Искомое электромагнитное поле $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)$ в присутствии конической поверхности и источника удовлетворяет уравнениям Максвелла, краевому условию на лентах конической структуры, начальному условию и условию ограниченности энергии.

Начально-краевая электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [5], которое представим в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_1(\vec{r}, t), \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \vec{H}_1(\vec{r}, t), \quad (2)$$

$\vec{E}_0(\vec{r}, t), \vec{H}_0(\vec{r}, t)$ - поле источника, $\vec{E}_1(\vec{r}, t), \vec{H}_1(\vec{r}, t)$ - поле, обусловленное присутствием конической структуры (рассеянное поле). Для решения начально-краевых задач с конической геометрией удобно использовать электрический $v^{(1)}$ и магнитный $v^{(2)}$ потенциалы Дебая, через которые выражаются составляющие поля [5]. Потенциалы Дебая, структура которых аналогична структуре полного поля (1), (2), удовлетворяют:

1) волновому уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) v^{(\chi)}(\vec{r}, t) = -\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \notin \Sigma,$$

$$\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1} r} M_r^{(\chi)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0), \quad \varepsilon \mu = \frac{1}{a^2};$$

2) начальному условию

$$v^{(\chi)} \equiv 0 \equiv \frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t}, \quad t \leq t_0;$$

3) краевому условию

$$\left. \frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} \left(\frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t} \right) \right|_{\Sigma} = 0; \quad (3)$$

4) условию ограниченности энергии

$$\iiint_V \left(\left| \frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v^{(\chi)}|^2 \right) dV < \infty, \quad v^{(\chi)}(\vec{r}, t) = v_0^{(\chi)}(\vec{r}, t) + v_1^{(\chi)}(\vec{r}, t),$$

где

$$v_0^{(\chi)} = -\frac{M_r^{(\chi)}}{4\pi r_0 \varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1}} \frac{1}{R} f\left(t - t_0 - \frac{1}{a} R\right) \eta\left(t - t_0 - \frac{1}{a} R\right)$$

потенциал источника, $v_1^{(x)}(\vec{r}, t)$ - искомый потенциал Дебая, соответствующий рассеянному полю, $\eta(\xi)$ - функция Хевисайда, $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$. Вследствие использования аппарата функций Грина и интегральных преобразований Мелера-Фока [6] представляем $v_1^{(x)}(\vec{r}, t)$ в виде

$$v_1^{(x)}(\vec{r}, t) = \frac{aM_r^{(x)}}{4\pi r r_0^2 \varepsilon^{2-x} \mu^{x-1}} \eta\left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a}\right) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \int_0^{+\infty} \tau th \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \hat{b}_{m\tau}^{(x)} \hat{U}_{m,i\tau}^{(x)}(\theta, \varphi) \Phi_{i\tau}(t, r) d\tau, \quad (4)$$

$$\Phi_{i\tau}(t, r) = \int_{\frac{r+r_0}{a}}^{t-t_0} f(t-t_0-z) P_{-1/2+i\tau}(chb(z)) dz, \quad chb(z) = \frac{a^2 z^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}, \quad (5)$$

$$\hat{U}_{m,i\tau}^{(x)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}^{(x)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)}{d^{\chi-1}} e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}^{(x)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)}{d^{\chi-1}} e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma < \theta < \pi, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция, $P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)$ - функция Лежандра 1-го рода, $\hat{b}_{m\tau}^{(x)}$ - известные коэффициенты, $x_{m,n+m_0}^{(x)}$ - неизвестные коэффициенты, $\frac{m}{N} = m_0 + \nu$, m_0 - ближайшее целое число к $\frac{m}{N}$, $-1/2 \leq \nu < 1/2$.

Следует отметить, что интегральное представление (4), (5) для потенциала Дебая целесообразно использовать, например, для анализа электромагнитного поля в переходных областях. Для изучения пространственно-временного распределения поля в случае близкого расположения источника к вершине конуса (наиболее интересного с точки зрения практического приложения), следует перейти в (6) к интегрированию вдоль мнимой оси ($\hat{\mu} = i\tau$) и разложить полученный интеграл в ряд по вычетам подынтегральной функции. Приведем вид для $v_1^{(x)}$ при осесимметричном возбуждении конуса с продольными щелями ($\theta_0 = \pi$) после перехода к интегрированию по мнимой оси:

$$v_1^{(x)}(\vec{r}, t) = -\frac{a\hat{p}_\chi}{4\pi^2 r r_0^2} \eta\left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu} \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma) \hat{U}_{0,\hat{\mu}}^{(x)}(\theta, \varphi) \hat{\Psi}_{\hat{\mu}}(t, r) d\hat{\mu}. \quad (7)$$

$$\hat{\Psi}_{i\tau}(t, r) = \int_{\frac{r+r_0}{a}}^{t-t_0} f(t-t_0-z) Q_{-1/2+i\tau}(chb(z)) dz,$$

$Q_{-1/2+i\tau}(chb(z))$ - функция Лежандра 2-го рода. Подынтегральная функция в (7) имеет в качестве изолированных особых точек только полюсы функции $\hat{U}_{0,\hat{\mu}}^{(x)}$, которые находятся на оси $\text{Re } \hat{\mu}$. Представим $\hat{U}_{0,\hat{\mu}}^{(x)}$ в виде

$$\hat{U}_{0,\hat{\mu}}^{(x)}(\theta, \varphi) = \frac{g_{\hat{\mu}}^{(x)}(\theta, \varphi)}{G_{\hat{\mu}}^{(x)}}$$

и после замыкания контура интегрирования (7) в правой полуплоскости ($\text{Re } \hat{\mu} > 0$) комплексной плоскости изменения переменной $\hat{\mu}$ используем основную теорему о вычетах [7], вследствие чего получаем представления потенциала $v^{(x)}(\vec{r}, t)$ для полного поля \vec{E} , \vec{H} в виде ряда

$$v^{(x)}(\vec{r}, t) = -\frac{a\hat{p}_\chi}{2\pi r r_0^2} \eta\left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a}\right) \sum_{s=0}^{+\infty} \hat{\mu}_s^{(x)} \frac{g_{\hat{\mu}_s}^{(x)}}{d \hat{\mu}_s^{(x)} G_{\hat{\mu}_s}^{(x)}} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\mu}_s^{(x)}} \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+\hat{\mu}_s^{(x)}}(\cos\gamma) \hat{\Psi}_{\hat{\mu}_s^{(x)}}(t, r),$$

где $\hat{\mu}_s^{(x)}$ - простые корни функции $G_{\hat{\mu}}^{(x)}$:

$$G_{\hat{\mu}}^{(x)} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\mu}_s^{(x)}} = 0. \quad (8)$$

При осесимметричном возбуждении конуса с продольными щелями электрическим радиальным диполем ($\chi = 1$) представление для одной из составляющих электрического рассеянного поля запишется так ($\theta_0 = \pi$)

$$E_{\theta,1} = -\frac{a\hat{p}_1}{2\pi r^2 r_0^2} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} \hat{\mu}_s^{(1)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{\hat{\mu}}^{(1)}}{d \hat{\mu} G_{\hat{\mu}}^{(1)}} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\mu}_s^{(1)}} P_{-1/2+\hat{\mu}_s^{(1)}}(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial r} \left[\hat{\Psi}_{\hat{\mu}_s^{(1)}}(t, r) \right], \quad (9)$$

В случае близкого расположения источника к вершине поверхности ($r_0 \ll 1$, $r_0 < r$), а также при изучении поведения поля вблизи вершины ($r \ll 1$, $r < r_0$) из ряда удастся выделить доминирующую моду, которая и будет определять поле в каждом из вышеперечисленных случаев.

Для $E_{\theta,1}$ составляющей поля при $rr_0 \ll 1$ ограничиваемся первым членом ряда (9) и получаем одномодовое приближение

$$E_{\theta,1}^{(0)} = -\frac{a\hat{p}_1}{2\sqrt{\pi}} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) r_0^{-3/2+\hat{\mu}_0^{(1)}} r^{-3/2+\hat{\mu}_0^{(1)}} \frac{\Gamma(3/2+\hat{\mu}_0^{(1)})}{\Gamma(\hat{\mu}_0^{(1)})} P_{-1/2+\hat{\mu}_0^{(1)}}(\cos \gamma) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{\hat{\mu}}^{(1)}(\theta, \varphi)}{d \hat{\mu} G_{\hat{\mu}}^{(1)}} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\mu}_0^{(1)}} \hat{F}_{\hat{\mu}_0^{(1)}}^{(1)}(t, r, r_0),$$

$$\hat{F}_{\hat{\mu}_0^{(1)}}^{(1)}(t, r, r_0) = \int_{\frac{r+r_0}{a}}^{t-t_0} \frac{f(t-t_0-z)}{(a^2 z^2 - r^2 - r_0^2)^{\hat{\mu}_0^{(1)}+1/2}} h(z, r, r_0) dz, \quad (10)$$

$$h(z, r, r_0) = \frac{a^2 z^2 + r^2 - r_0^2}{\sqrt{a^2 z^2 - (r+r_0)^2} \sqrt{a^2 z^2 - (r-r_0)^2}}.$$

Зависимость составляющих поля от временного параметра t в случае близкого расположения источника к вершине ($r_0 \ll 1$) характеризуется функцией $\hat{F}_{\hat{\mu}_0^{(1)}}^{(1)}(t, r, r_0)$ (10), которая в случае возбуждения δ -образным импульсом имеет вид ($f(t-t_0) = \delta(t-t_0)$)

$$\hat{F}_{\hat{\mu}_0^{(1)}}^{(1)}(t, r, r_0) = \frac{h(t-t_0, r, r_0)}{(a^2(t-t_0)^2 - r^2 - r_0^2)^{\hat{\mu}_0^{(1)}+1/2}}.$$

В данном случае возбуждения электромагнитное поле вблизи вершины конической поверхности ведет себя следующим образом:

$$\left| \vec{E} \right| \propto r^{-1+\alpha}, \quad \left| \vec{H} \right| \propto r^\alpha, \quad r \ll 1, \quad \alpha = -1/2 + \hat{\mu}_0^{(1)}, \quad \hat{\mu}_0^{(1)} = \min_s \hat{\mu}_s^{(1)}$$

Для нахождения функции $\hat{U}_{m,ir}^{(\chi)}$ (6) необходимо найти неизвестные коэффициенты $x_{m,n+m_0}^{(\chi)}$. Система линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) для $x_{m,n+m_0}^{(\chi)}$ получается вследствие использования краевого условия (3), условия непрерывности поля в щелях, а также метода сопряжения [8].

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

В случае осесимметричного возбуждения конуса с одной щелью ($\theta_0 = \pi$, $N=1$) электрическим радиальным диполем ($\chi = 1$) неизвестные коэффициенты $x_n^{(1)}$ являются решением такой СЛАУ-2

$$x_0^{(1)} \left\{ D_{ir}^{(1)} - \ln \frac{1-u}{2} \right\} + D_{ir}^{(1)} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p x_p^{(1)} \varepsilon_p^{(1)} [P_p(u) + P_{-p}(u)] = D_{ir}^{(1)}, \quad (11)$$

$$(-1)^n \frac{D_{ir}^{(1),n}}{D_{ir}^{(1)}} x_0^{(1)} [P_n(u) + P_{-n}(u)] +$$

$$+ 2D_{ir}^{(1),n} (-1)^{n+1} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p p x_p^{(1)} \varepsilon_p^{(1)} [V_{n-1}^{p-1}(u) + V_{-n-1}^{p-1}(u)] - 2x_n^{(1)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

где

$$D_{i\tau}^{(1)} = \frac{\pi}{ch\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma), \quad D_{i\tau}^{(1),n} = (-1)^n \frac{\pi}{ch\pi\tau} \frac{\Gamma(1/2+i\tau-n)}{\Gamma(1/2+i\tau+n)} P_{-1/2+i\tau}^n(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos\gamma),$$

$$N|n|(1-\varepsilon_n^{(1)}) = \frac{(-1)^{nN} ch\pi\tau}{\pi \sin\gamma} \frac{\Gamma(1/2+i\tau+nN)}{\Gamma(1/2+i\tau-nN)} \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\gamma)},$$

где $u = -\cos\frac{d}{2}$, а функции $V_{n-1}^{p-1}(u)$ определены в [9].

Численное решение СЛАУ-2 (11), (12) с учетом выбора порядка усечения для соответствующих параметров задачи можно получить с помощью метода редукции (матричный оператор системы является вполне непрерывным). Нули определителя системы совпадают с корнями уравнения (8). На рис.2 приведена зависимость значения $\hat{\mu}_0^{(1)}$ от ширины щели при различных фиксированных углах раскрыва конуса.

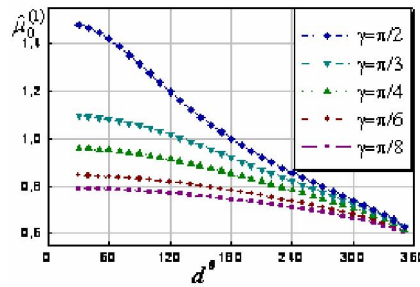


Рис.2. – Зависимость значения $\hat{\mu}_0^{(1)}$ как функции ширины щели d для различных углов полуоткрытия конуса γ .

Для изучения пространственного распределения электромагнитного поля при возбуждении структуры коротким импульсным сигналом большой интерес представляют результаты исследования электродинамической задачи в случае возбуждения поверхности δ -образным импульсным источником.

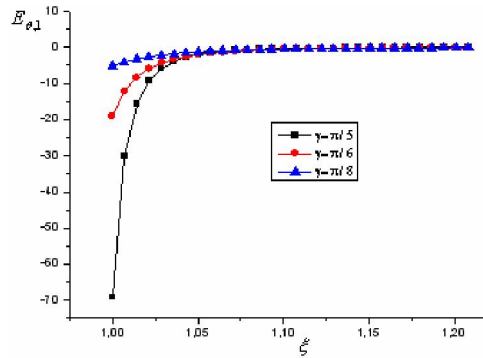


Рис. 3. – Зависимость $E_{\theta,1}$ от $\xi = at/(r+r_0)$ при различных значениях γ , $d = \pi/6$.

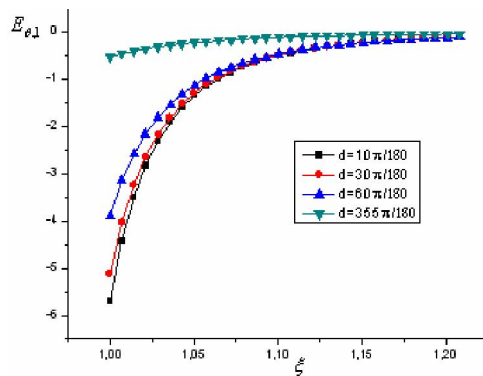


Рис. 4. – Зависимость $E_{\theta,1}$ от ξ при различных фиксированных значениях d , $\gamma = \pi/8$.

На рис.3 приведена зависимость распределения составляющей рассеянного конусом с одной щелью электрического поля $E_{\theta,1}$ в случае возбуждения δ -образным электрическим радиальным диполем. По оси ординат откладываются значения $E_{\theta,1}$, а по оси абсцисс – значения параметра $\xi = at/(r+r_0)$. Следует отметить, что значение последнего определяет положение волнового фронта по отношению к точке наблюдения. Так, при $\xi = 1$ волновой фронт находится в самой точке наблюдения, а по мере удаления волнового фронта от точки наблюдения величина ξ увеличивается, превышая единицу.

По кривым, приведенным на рис 3 и соответствующим различным углам полуоткрыва конуса γ при ширине щели $d = \pi/6$, можно судить об изменении значения $E_{\theta,1}$ при удалении волнового фронта от точки наблюдения и увеличении угла полуоткрыва конуса. В случае уменьшения угла полуоткрыва конуса уменьшается и рассеянное им поле при одном и том же значении параметра ξ .

Зависимость значения составляющей $E_{\theta,1}$ от параметра ξ для различных фиксированных значений угловой ширины d щели дана на рис. 4 (точка наблюдения находится в плоскости, проходящей через ось конуса и щели). Из рис. 4 видно, что с расширением щели абсолютная величина составляющей $E_{\theta,1}$ уменьшается, что согласуется с асимптотическим решением, полученным для узкого конуса в [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование модельной задачи возбуждения импульсным источником конической поверхности с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Решение соответствующей начально-краевой задачи математической физики проводится с помощью строгого аналитико-численного метода, базирующегося на привлечении интегральных преобразований Мелера-Фока и метода задачи сопряжения. Получены представления для решения в интегральном виде, а также и в виде ряда при осесимметричном возбуждении незамкнутого конуса во времени δ -образным электрическим радиальным диполем. В случае близкого расположения источника к вершине конуса приведены одночленные приближения для решения, удобные для анализа пространственно-временного распределения электромагнитного поля. На основе найденного решения изучено поведение поля вблизи вершины конической структуры. В случае осесимметричного возбуждения конуса с одной щелью приведены кривые зависимости величины одной из составляющих электрического поля от параметра, связанного со степенью удаления волнового фронта от точки наблюдения при различных фиксированных значениях ширины щели и углов открыва конуса. Полученные в работе результаты могут быть использованы при изучении свойств и проектировании конических щелевых антенн, работающих в режиме переизлучения коротких импульсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур. – М: Радиотехника, 2003. – 720с.
2. Taflov A., Hagness S.C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. – Boston: Artech House, 2000. – 600p.
3. Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations//IEEE Tr. on EMC. – 1981. – Vol.23, no.4. – P.377-382.
4. Сиренко К.Ю., Сиренко Ю.К. Точные «поглощающие» условия в начально-краевых задачах теории открытых волноводных резонаторов// Журнал вычислит. математики и математ. физики. – 2005. – Т.45, №3. – С.509-525.
5. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224с.
6. Doroshenko V.A., Kravchenko V.F., Pustovoi V.I. Meler-Fock transformations in problems of wave diffraction on unclosed structures in the time region//Doklady Physics. – 2005. – No.11. – P. 560-564.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736с.
8. Semenova E.K., Doroshenko V.A. Electromagnetic excitation of PEC slotted cones by elementary radial dipoles – a semi-inversion analysis// IEEE Trans. on Antennas & Propagat. – 2008. – Vol.56, No.7. – P.1976-1983.
9. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е. и др. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. - Харьков: Основа, 1997. – 286с.
10. Chan K.-K., Felsen L. Transient and time-harmonic diffraction by a semi-infinite cone// IEEE Trans. on Antennas & Propagat. – 1977. – V.AP-25, No. 6. – P. 802-806.